Разработка метапредметного урока по математике и физике

по теме «Производная в математике и физике» в 11 классе
(с использованием метапредметных образовательных технологий)

Учитель математики: Моргунова Т.Ю.
Учитель физики: Вакулова Л.А.
ГБОУ лицей № 445 Санкт-Петербурга

Основная цель урока – сформировать у учащихся умение решать простейшие практические задачи с использованием методов дифференциального исчисления.

В целях закрепления пройденного материала по математике и физике в 11 классе и углубления пройденного в 9 классе по физике (раздел механики) на уроке целесообразно рассмотреть следующие **вопросы**:

1. Определение производной в математике.
2. Физический смысл производной.
3. Примеры физических величин, являющихся производной по времени от других физических величин.
4. Таблица производных.
5. Вывод уравнения колебаний и его решение.
6. Использование производной для решения задач по механике:
а) определение скорости и ускорения;
б) нахождение максимальной величины.
7. Использование производной при решении задач на механические или электромагнитные колебания.
8. Решение задач на нахождение первообразной.

Ход урока

Вступительное слово учителя физики:

«Часто нас интересует не значение какой-либо величины, а ее изменение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины; работа есть изменение энергии; средняя скорость – это отношение перемещения к промежутку времени, за который было совершено это перемещение и т.д.»

Учитель математики:

«Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$.

Пусть $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента;

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции.

Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ - скорость изменения функции.

А теперь дайте определение производной».

Первый учащийся дает определение производной (и остается у доски).

Учитель физики: «Понятие производной так и осталось бы для многих учащихся математически абстрактным символом, если бы не уроки физики.

Я прошу вас назвать физические величины, являющиеся производной по времени от других физических величин, и выписать их обозначения в столбик».

(Рассматриваются следующие физические величины: скорость, ускорение, ЭДС индукции, сила тока).

Первый учащийся выполняет задание.

Затем учащимся предлагается дать определение этих величин и записать их через производную:

$$v = x'; \quad a = v' = x''; \quad e_i = -\Phi'; \quad i = q'.$$

Второй учащийся по карточке (приложение 1) выписывает на доске значения табличных производных.

Учитель физики вызывает третьего ученика выводить на доске уравнение колебаний и дать его решение на основе знаний элементарных производных (приложение 2).

Четвертый учащийся решает задачу на определение скорости (приложение 3).

Пятый учащийся решает задачу на определение ускорения (приложение 4).

Шестой учащийся решает задачу на нахождение *max* и *min* функции (приложение 5).

Седьмой учащийся решает задачу по физике на определения *max* дальности полета струи жидкости (приложение 6).

Учитель физики: «Производная используется не только при решении задач по механике, но, как мы убедились в начале урока, и при изучении электромагнитных колебаний. Решим задачу на определение параметров колебательной системы».

Восьмой учащийся решает задачу (приложение 7).

Учитель математики: «Функция – обратная производной – это первообразная. Применяем первообразную в математике и при решении задач в физике».

Девятый ученик решает задачу (приложение 8).

Используемая литература: открытый банк заданий ЕГЭ.

Приложение 1.

Запишите значения производных:

$(C \cdot x)' =$

$(x^2)' =$

$(\sqrt{x})' =$

$(k\,x + b)' =$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' =$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

$(u \cdot v)' =$

$(u \pm v)' =$

$\left(x^{n-1}\right)' =$

$(\sin x)' =$

$(\cos x)' =$

$(tg\,x)' =$

$(ctg\,x)' =$

Приложение 2.

I. Вывод уравнения, описывающего процессы в колебательном контуре.

Полная электромагнитная энергия W контура в любой момент времени:

$W = \frac{L \cdot i^2}{2} + \frac{q^2}{2\,C}$, где L – индуктивность, C – электроемкость.

Эта энергия не меняется, если сопротивление контура равно нулю.

Следовательно:

$$\frac{L \cdot i^2}{2} + \frac{q^2}{2\,C} = const\,; \qquad \left(\frac{L \cdot i^2}{2} + \frac{q^2}{2\,C} \right)' = 0;$$

$$\left(\frac{L \cdot i^2}{2} \right)' + \left(\frac{q^2}{2\,C} \right)' = 0; \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{L \cdot i^2}{2} \right)' = - \left(\frac{q^2}{2\,C} \right)';$$

$$\frac{L}{2} \cdot 2\,i\,i' = -\frac{1}{2\,C} \cdot 2\,q\,q'.$$

Так как $i = q'$ и $i' = q''$, то $\frac{L}{2} \cdot 2\,q'\,q'' = -\frac{1}{2\,C} \cdot 2\,q\,q'$; $L \cdot q'' = -\frac{1}{C} \cdot q$.

Отсюда, $q'' = -\frac{1}{L\,C} \cdot q$. (1)

II. Решение уравнения, описывающего свободные колебания.

Нельзя считать, что $q = q_m \cdot const$ или $q = q_m \cdot \sin t$, так как в этом случае вместо $q'' = -\frac{1}{L\,C} \cdot q$ получилось бы равенство: $q'' = -\,q_m \cdot \sin t = -\,q$.

Но небольшое усложнение формы решения приводит нас к цели.

Чтобы в выражении второй производной был множитель $\frac{1}{L\,C}$, запишем решение уравнения (1) в виде: $q = q_m \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}} \cdot t \right)$. (2)

Тогда $q' = -\sqrt{\frac{1}{L\,C}} \cdot q_m \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}} \cdot t \right)$,

а $q'' = -\frac{1}{L\,C} \cdot q_m \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{L\,C}} \cdot t \right) = -\frac{1}{L\,C}\,q$.

Следовательно, функция (2) есть решение исходного уравнения (1).

Приложение 3.

Задача.

Материальная точка движется прямолинейно по закону:

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t.$$

а) Выведите формулу для вычисления скорости движения в любой момент времени *t*.

б) Найдите скорость в момент времени *t = 2 сек.* (перемещение измеряется в метрах).

в) Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

Решение:

а) $v(t) = x'(t) = \left(-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t\right)' = -t^2 + 4t + 5.$

б) *t = 2 сек.,* $v(2) = x'(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = -4 + 8 + 5 = 9\,(м/с).$

в) $-t^2 + 4t + 5 = 0;$

$$t^2 - 4t - 5 = 0;$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 4, \\ t_1 \cdot t_2 = -5; \end{cases}$$

$$t_1 = 5,\ t_2 = -1.$$

Ответ: *5 секунд.*

Приложение 4.

Задача.

Найдите силу *F*, действующую на материальную точку с массой *m*, движущуюся прямолинейно по закону $x(t) = 2t^3 - t^2$, при $t = 2$.

Решение:

$F = ma$.

Найдем ускорение движения:

$v(t) = x'(t) = 6t^2 - 2t$;

$a(t) = v'(t) = 12t - 2$;

$a(2) = 12 \cdot 2 - 2 = 22$;

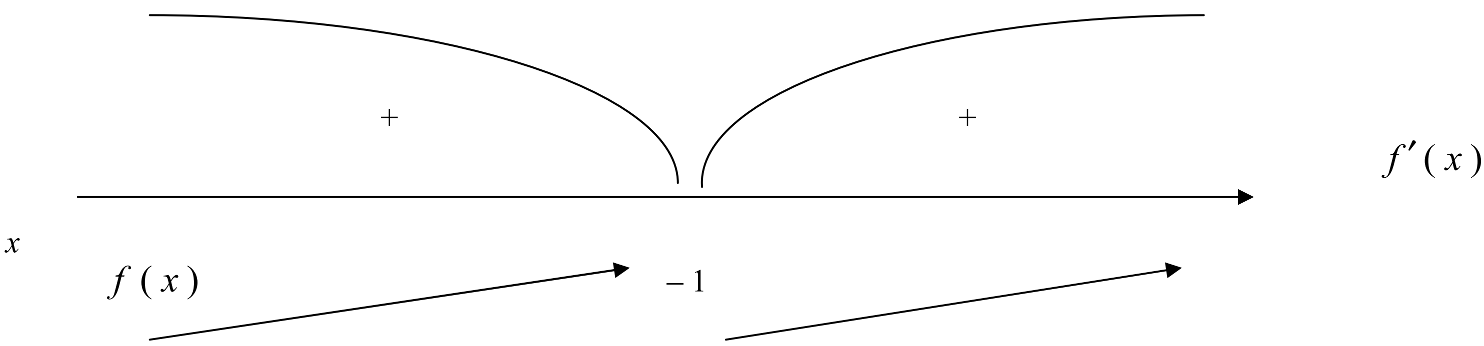
$F = m \cdot 22 = 22m$.

Ответ: $F = 22m$.

Приложение 5.

Задача.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции по рисунку:



Функция возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$.

Ответ: точек *max* и *min* нет.

Приложение 6.

Задача.

В цилиндрическом баке высотой 5 м находится жидкость. На какой высоте нужно сделать отверстие в стенке бака, чтобы дальность полета струи была максимальной ?

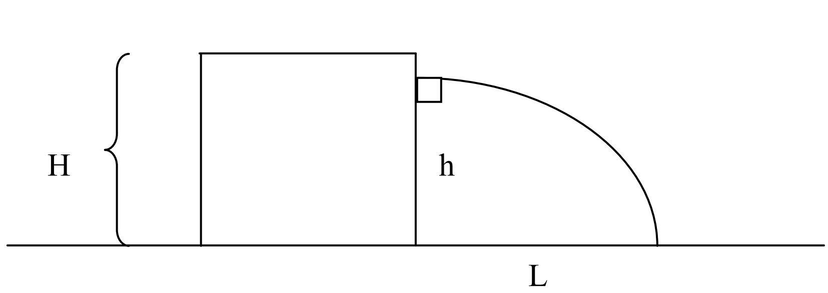
Дано:

H = *5 м*

L = *max*

---

h = ?



Решение:

1) Применим формулу Торричелли для скорости истечения жидкости из отверстия:

$$v = \sqrt{2g(H-h)}\ .$$

2) Пусть t – время движения элемента воды.

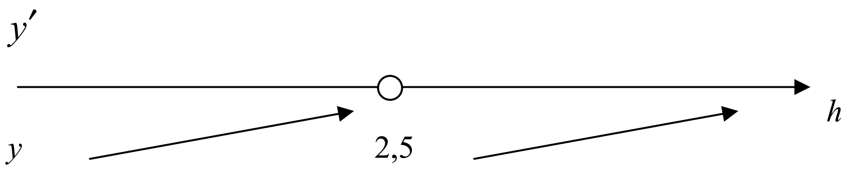
3) $h = \dfrac{gt^2}{2}$; $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

4) $L = vt = \sqrt{\dfrac{2g(H-h)\cdot 2h}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$.

5) Дальность полета струи максимальна, если максимальна функция $y = h(H-h)$, то есть $y = h(5-h)$.

6) Найдем производную: $y' = 5 - 2y$.

7) Найдем критические точки:



Ответ: дальность полета струи будет максимальной, если сделать отверстие в стенке бака на высоте *h = 2,5 м.*

Приложение 7.

Задача.

Проволочная рамка площадью *S* равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией *B* вокруг оси, перпендикулярно направлению поля. Период вращения равен *T*. Выразите магнитный поток *Ф*, проходящий через рамку, и ЭДС индукции в рамке как функцию времени.

Дано:	Решение:
T, S, B	1) $\Phi = B\,S\cos\alpha$.
Найти:	2) Угол α меняется во времени: $\alpha = \dfrac{2\pi}{T}t$.
$\Phi(t) = ?$	
$e(t) = ?$	3) Тогда: $\Phi(t) = B\,S\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.
	4) $e(t) = -\Phi'(t) = B\,S\cdot\dfrac{2\pi}{T}\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.

Приложение 8.

Задача.

Материальная точка массой *m* движется вдоль оси *Ox* под действием силы, направленной вдоль оси *Ox*. В момент времени *t* сила равна *F (t)*. Найдите формулу зависимости *x (t)* от времени *t*, если известно, что при $t = t_0$ скорость точки равна v_0, а координата равна x_0.

(*F (t)* – в ньютонах, *t* – в секундах, *v* – в м/сек, *m* – в кг)

Дано:

$F(t) = 14\sin t$,
$t_0 = \pi$,
$v_0 = 2$,
$x_0 = 3$,
$m = 7$.

Найти:
$x(t) = ?$

Решение:

1) По второму закону Ньютона:

$F = m\,a$, где a – ускорение.

Отсюда: $a = \dfrac{F(t)}{m} = \dfrac{14\sin t}{7} = 2\sin t$.

2) $v'(t) = a(t) = 2\sin t$.

$v(t) = -2\cos t + C_1$;

$v(\pi) = -2\cos\pi + C_1 = 2$; $\quad C_1 = 0$;

$v(t) = -2\cos t$.

3) $x'(t) = v(t) = -2\cos t$;

$x(t) = -2\sin t + C_2$;

$x(\pi) = -2\sin\pi + C_2 = 3$; $\quad C_2 = 3$;

$x(t) = -2\sin t + 3$.

Ответ: $x(t) = -2\sin t + 3$