

Рекомендации по выполнению индивидуального задания

Для того чтобы успешно выполнить задание, необходимо, в первую очередь, ответить (желательно письменно!) на следующие вопросы:

- 1) Что называют решением уравнения?
- 2) Что называют областью определения и множеством значений функции?
- 3) Что называют областью допустимых значений уравнения?
- 4) Какие существуют методы решения тригонометрических уравнений?

Кроме того, необходимо знать определения тригонометрических терминов, формулы, связывающие между собой различные тригонометрические функции, а также свойства тригонометрических функций.

Для ответов на эти вопросы можно использовать конспект или учебник. При решении уравнений графически, можно использовать как модель «числовая окружность», так и модель «*график тригонометрической функции*».

Существенную помощь в выполнении задания могут оказать приведенные ниже решение Варианта №0 и краткий теоретический конспект.

Требования к выполнению индивидуального задания

1. Номер варианта соответствует Вашему номеру в классном журнале.
2. Работа должна быть сдана **не позднее трех недель** с момента выдачи.
3. Задания должны быть выполнены подряд, оформлены разборчиво и аккуратно.
4. Выполнение заданий должно сопровождаться комментариями (пояснениями действий, ссылками на формулы и т.д.).
5. Наличие **ответа** обязательно.
6. Выбор метода решения – произвольный.
7. Если выбран графический метод решения, чертеж должен быть выполнен точно.
8. Работа должна быть выполнена **самостоятельно** – оценки будут выставлены только после защиты выполненной работы.

Задание можно выполнить как в отдельной тетради, так и на скрепленных листах.

Процедура защиты выполненного индивидуального задания

Защита выполненной работы проводится в устной, письменной или комбинированной форме (по усмотрению преподавателя). В процессе защиты требуется решить уравнения, аналогичные выполненным без опоры на текст и, при необходимости, ответить на ряд теоретических вопросов.

Оценка за работу выставляется с учетом исполнения всех выше перечисленных требований, полноты приведенных ответов и аккуратности выполнения заданий.

Успехов в выполнении задания!

	Вариант №1		Вариант № 2
1	$\cos 3x + 1 = 0$	1	$2\cos^4 x = 1$
2	$2\cos(x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$	2	$3\sin 5x - 2 = 0$
3	$\sin 3x = 2$	3	$\operatorname{ctg} 4x = 5$
4	$\sin 3x = \frac{1}{2}$	4	$\operatorname{tg}(5x + \frac{\pi}{3}) = 3$
5	$2\sin^2 x = 3\cos x$	5	$\sin^2 2x + 2 = 3\sin 2x$
6	$1 + \sin x \cdot \cos x = \sin x + \cos x$	6	$\sin x \cos x - 1 = \cos x - \sin x$
7	$(1 - \sin x)\operatorname{tg} x = 0$	7	$2\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 4$
8	$2\cos x + \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$	8	$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5$
9	$\sin^2 x + 1 = -2\sin x$	9	$\sin 3x + \sin x + 2\cos x = \sin 2x + 2\cos^2 x$
10	$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \cos x$	10	$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$

	Вариант №3		Вариант № 4
1	$\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\cos 2x - \frac{1}{2} = 0$
2	$\cos 2x = -\frac{1}{2}$	2	$\frac{\cos 3x}{\operatorname{tg} x} = 0$
3	$\sin(2x - 1,5) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	3	$\sin 4x = 1$
4	$\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$	4	$\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x = 0$
5	$\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0$	5	$2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$
6	$\sin 2x \cdot \cos 4x \cdot \operatorname{tg} x = 0$	6	$5 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$
7	$\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x = 0$	7	$\cos 2x + \cos^2 x = 0$
8	$\frac{\operatorname{tg} x \cdot \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x} = 0$	8	$\sin 7x - \cos 4x = \sin x$
9	$3 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 2$	9	$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$
10	$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - 4) = 2$	10	$6 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$

	Вариант №5		Вариант № 6
1	$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\cos 2x - \frac{1}{2} = 0$
2	$\sin 2x = \frac{1}{2}$	2	$\sin^2 x = \frac{3}{4}$
3	$\sin^2 x + \frac{3}{4} = 0$	3	$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x} = 0$
4	$-2\operatorname{tg} 3x = 2$	4	$8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$
5	$\operatorname{tg} x(3\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0$	5	$22\cos^2 x + 8\sin x \cos x = 7$
6	$\sin(2x + 30^\circ) + \cos(2x + 30^\circ) = 0$	6	$\cos 2x = 5\sin x + 3$
7	$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} 2x$	7	$\cos 2x + \cos 8x - \cos 6x = 1$
8	$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos x + 2 = 0$	8	$8\cos^4 x = 1 + \cos 4x$
9	$\cos 3x + \sin 5x = 0$	9	$\sin^2 3x + \cos^2 2x = 1$
10	$\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos x \cdot \cos 3x$	10	$\cos^4 x - \cos^2 x = 0$

	Вариант №7		Вариант № 8
1	$2\cos 4x=2$	1	$\cos \frac{3x}{2}+1=0$
2	$\cos 2x-3\cos ^2 2x=0$	2	$\frac{\cos 4x-1}{\cos (-x)}=0$
3	$\sin x=\sin 10^{\circ}$	3	$\sin 3x+\frac{1}{2}=0$
4	$\sin ^2 2x=3\sin 2x$	4	$\cos 3x \cdot \sin 3x=\frac{1}{2}$
5	$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos x}=0$	5	$\sin ^2 3x+\sin x+\cos ^2 3x=0$
6	$\sin ^2 x-2\sin x-3=0$	6	$\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{3}=0$
7	$1+\operatorname{tg} x=2\operatorname{tg}^2 x$	7	$8\sin ^2 x+6\cos x-3=0$
8	$2\sin ^2 x+\sqrt{3} \sin 2x=1+2\cos x$	8	$\cos ^2 x+3\sin ^2 x+2\sqrt{3} \sin x \cos x=3$
9	$4\sin x-6\cos x=1$	9	$2\sin 11x+\sqrt{3} \sin 5x+\cos 5x=0$
10	$2\sin x \cos x-2\cos ^2 x=0$	10	$\sin ^2 x+0,5 \sin 2x-2\cos ^2 x=0$

	Вариант №9		Вариант № 10
1	$\cos 3x + \frac{1}{2} = 0$	1	$\cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} = 0$	2	$\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0$
3	$2\sin x = \sqrt{2}$	3	$2\sin 2x = -1$
4	$\frac{\sin x}{\sin 3x} = 0$	4	$\sin 2x \cdot \cos 2x - 2\sin 2x = 0$
5	$2\operatorname{tg} 3x = 2$	5	$\operatorname{tg} 2x = 1$
6	$\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$	6	$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x} = 0$
7	$\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2x = \cos^2 x$	7	$\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$
8	$2\cos^2(x + 270^\circ) + 3\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 0$	8	$\sin^3 x + \cos^3 x = 0$
9	$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 0,25 \sin 4x$	9	$\cos^4 x + \sin^4 x - 3\sin 2x + \frac{5}{2} \sin^2 2x = 0$
10	$\cos(3x + 45^\circ) + \cos 15^\circ = 0$	10	$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

	Вариант №11		Вариант № 12
1	$2\cos^2 3x - \cos 3x = 0$	1	$\cos \frac{3\pi}{2} + 1 = 0$
2	$\sin 2x = \frac{1}{2}$	2	$\sin^2 2x - \frac{1}{8} = 0$
3	$3\cos 2x = 7\sin x$	3	$\frac{\cos x}{\operatorname{tg} 2x} = 0$
4	$2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$	4	$\operatorname{tg} 2x \cdot \cos x = 0$
5	$7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x = 15$	5	$8\sin^2 x + 6\cos x - 3 = 0$
6	$\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$	6	$2\cos 2x = 7\cos x$
7	$\sin x + \sin 3x = \sin 5x - \sin x$	7	$4\cos^2 x + \sin x = 1$
8	$\sin x - \cos 2x = 0$	8	$\cos 2x = 5\sin x + 3$
9	$5\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$	9	$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$
10	$2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$	10	$\sin^2 x + 0,5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$

	Вариант №13		Вариант № 14
1	$\cos^2 2x - \frac{1}{2} = 0$	1	$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\sin x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$	2	$\cos x = 0,995$
3	$\frac{\sin x}{\sin 3x} = 0$	3	$3\operatorname{tg} x + 1 = 0$
4	$\operatorname{tg}(3x + 60^\circ) = \sqrt{3}$	4	$8\operatorname{ctg} x + 4 = 0$
5	$2\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sin x = 0$	5	$2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x - 8\cos^2 x = -2$
6	$2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$	6	$4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$
7	$2\sin^2 x + \cos^2 x = 5\sin x \cdot \cos x$	7	$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$
8	$5\cos x - \sin x + 5 = 0$	8	$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8}$
9	$1 + \cos x + \cos 2x = 0$	9	$\sin 7x = \sin 3x$
10	$\sin 5x - \sin x = 0$	10	$\sin 3x \cdot \sin 9x = \sin 5x \cdot \sin 7x$

	Вариант №15		Вариант № 16
1	$2\sin^2 2x - 1 = 0$	1	$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\cos \frac{x}{2} - 1 = 0$	2	$\sin 4x = -1$
3	$\cos(\frac{x}{2} - 1) = \cos^2(1 - \frac{x}{2})$	3	$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$
4	$\sin 1,5x + 1 = 0$	4	$\operatorname{tg}(3x + 60^\circ) = \sqrt{3}$
5	$\operatorname{tg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$	5	$3\operatorname{tg}^2 3x = 1$
6	$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	6	$4(1 + \cos x) = 3\cos \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$
7	$\sin^3 x + \cos^3 x = 0$	7	$2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1$
8	$2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$	8	$\cos x \cdot \sin 7x = \cos 3x \cdot \sin 5x$
9	$4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$	9	$1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \cos 2x + \sin 2x$
10	$\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$	10	$\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$

	Вариант №17		Вариант № 18
1	$\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\cos \frac{3x}{2} + 1 = 0$
2	$2\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$	2	$\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 1$
3	$3\operatorname{tg}^2 2x = 1$	3	$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$
4	$\operatorname{ctg}(3x + 50^\circ) = 1,25$	4	$\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$
5	$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$	5	$2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$
6	$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2$	6	$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$
7	$2\cos^2 x = 3\sin x$	7	$\cos 2x - \cos 6x = 0$
8	$\cos^4 x - \cos^2 x = 0$	8	$\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$
9	$3\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$	9	$\sin^2 3x + \cos^2 2x = 1$
10	$8\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4$	10	$4\sin^4 x = 1 + 5\cos^2 x$

	Вариант №19		Вариант № 20
1	$\cos 3x = -1$	1	$\cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
2	$3\cos \frac{x}{3} = -7$	2	$\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = -1$
3	$\sin \frac{x}{2} - 1 = 0$	3	$4 - 3\operatorname{tg} x = 0$
4	$\sin^2(x - 30^\circ) + \frac{1}{2} = 0$	4	$\sin^2 x - \sin x = 0$
5	$\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$	5	$\cos^2 x = \sin^2 x - 1$
6	$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{ctg} x$	6	$\sin 5x \cdot \sin 4x = -\cos 6x \cdot \cos 3x$
7	$4\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + 3\sin^2 \frac{x}{2} = 3$	7	$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$
8	$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$	8	$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x = 2\operatorname{ctg} 4x$
9	$\sin^4 x + \sin^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$	9	$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
10	$\sin x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$	10	$8\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$

	Вариант №21		Вариант № 22
1	$\sin x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$	1	$2\cos^2 3x - \cos 3x = 0$
2	$2\cos 4x = 2$	2	$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} = 0$
3	$\frac{\cos 3x}{\operatorname{tg} x} = 0$	3	$3\operatorname{tg} x + 1 = 0$
4	$8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$	4	$8\operatorname{ctg} x + 4 = 0$
5	$2\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sin x = 0$	5	$\sin x \cos x - 1 = \cos x - \sin x$
6	$\sin^3 x + \cos^3 x = 0$	6	$4(1 + \cos x) = 3\cos \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}$
7	$2(\cos^4 x - \sin^4 x) = 1$	7	$\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$
8	$\sin x - \cos 2x = 0$	8	$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8}$
9	$\cos 2x = 5\sin x + 3$	9	$1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \cos 2x + \sin 2x$
10	$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \cos x$	10	$2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$

	Вариант №23		Вариант № 24
1	$\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=0$	1	$2\cos 4x=2$
2	$\operatorname{ctg} 4x=5$	2	$\sin x=\sin 10^{\circ}$
3	$3\cos \frac{x}{3}=-7$	3	$\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x}=0$
4	$\operatorname{tg} \frac{x}{2}+1=0$	4	$\sin x \cos x-2 \sin 2 x=0$
5	$\operatorname{ctg}(3 x+50^{\circ})=1,25$	5	$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$
6	$\operatorname{tg} 2 x+\operatorname{ctg} 2 x=2$	6	$22 \cos ^2 x+8 \sin x \cos x=7$
7	$5 \cos x-\sin x+5=0$	7	$\sqrt{3} \sin x+\cos x=0$
8	$2 \sin 11 x+\sqrt{3} \sin 5 x+\cos 5 x=0$	8	$\sin 7 x=\sin 3 x$
9	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2$	9	$3 \sin ^2 x-5 \sin x \cos x=0$
10	$4 \sin ^4 x=1+5 \cos ^2 x$	10	$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2 x=\operatorname{tg} 3 x$

	Вариант №25		Вариант № 0
1	$\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\cos \frac{x}{3} = -1$
2	$tg \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$	2	$\sin 2x = 1$
3	$\sin^2 2x = 3 \sin 2x$	3	$tgx = 2$
4	$\cos 3x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$	4	$(4 \cos x - 1) \cdot (2 \cos 2x + 1) = 0$
5	$\sin 2x \cdot \cos 4x \cdot tgx = 0$	5	$(3 \sin x - 1) \cdot (2 \sin 2x + 1) = 0$
6	$2tgx - ctgx = 1$	6	$(tgx + 4) \cdot (ctgx - \sqrt{3}) = 0$
7	$2 \sin 17x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0$	7	$2 \cos^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$
8	$1 + \cos x + \cos 2x = 0$	8	$tgx - 2ctgx + 1 = 0$
9	$\sin^2 x + 0,5 \sin 2x - 2 \cos^2 x = 0$	9	$2 \sin x - 3 \cos x = 0$
10	$\sin 3x \cdot \sin 9x = \sin 5x \cdot \sin 7x$	10	$\cos 3x \cdot \cos x = \cos 2x$

Решение варианта №0

1. Решить уравнение $\cos \frac{x}{3} = -1$.

Решение: $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = 3\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 3\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. Решить уравнение $\sin 2x = 1$.

Решение: $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

Решение: зная, что решением уравнения $\operatorname{tg} x = a$ является $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, получаем:

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Решить уравнение $(4 \cos x - 1)(2 \cos 2x + 1) = 0$.

1) $4 \cos x - 1 = 0, \cos x = \frac{1}{4}, x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $2 \cos 2x + 1 = 0, \cos 2x = -\frac{1}{2}, 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5. Решить уравнение $(3 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) = 0$.

1) $3 \sin x - 1 = 0, \sin x = \frac{1}{3}, x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $2 \sin 2x + 1 = 0, \sin 2x = -\frac{1}{2}, 2x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n$

$2x = (-1)^n (-\frac{\pi}{6}) + \pi n, 2x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

6. Решить уравнение $(\operatorname{tg} x + 4)(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$.

1) $\operatorname{tg} x + 4 = 0, \operatorname{tg} x = -4; x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} = 0, \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}, \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}; x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg}(-4) + \pi n; x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. Решить уравнение $2 \cos^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$.

Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получаем:

$2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 1 = 0$, или $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$.

Обозначая $\sin x = y$, получаем $2y^2 + 5y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3, y_2 = \frac{1}{2}$, подставляем:

1) $\sin x = -3$; уравнение не имеет корней, так как $|-3| > 1$.

2) $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

8. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то уравнение можно записать в виде $\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0$. Умножая обе

части уравнения на $\operatorname{tg} x$, получаем: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$, Обозначим $\operatorname{tg} x = y$, тогда
 $y^2 + y - 2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$.

1) $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg} x = -2$, $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что левая часть исходного уравнения имеет смысл, если $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Так как для найденных корней $\operatorname{tg} x \neq 0$ и $\operatorname{ctg} x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению $t^2 + t - 2 = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

9. Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$. Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$,

$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$; $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

10. Решить уравнение $\cos 3x \cdot \cos x = \cos 2x$.

Так как $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x$, уравнение примет вид: $\sin x - \sin 3x = 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что числа вида πn содержатся среди чисел вида $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$, так как если $n = 3k$,

то $\frac{\pi n}{3} = \pi k$. Следовательно, первая серия корней содержится во второй.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Краткая теория

Решение тригонометрического уравнения любой сложности в итоге сводится к решению простых тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения.

1. $\cos \alpha = a$.

Рассмотрим следующие случаи:

а) $|a| > 1$. Прямая $x=a$ не имеет с единичной окружностью общих точек, поэтому уравнение $\cos \alpha = a$ не имеет решения.

б) $|a|=1$. Прямая $x=a$ с единичной окружностью имеет две точки соприкосновения: $(1,0)$

и $(-1,0)$. В точке $(1,0)$: $\cos \alpha = 1$, $\alpha = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. В точке $(-1,0)$: $\cos \alpha = -1$, $\alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Частный случай: прямая $x=a$ пересекает окружность в точках: $(0,1)$ и

$(0,-1)$. $\cos \alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

в) $|a| < 1$. Прямая $x=a$, пересекается с единичной окружностью, откуда получаем угол α ($\alpha \in [0, \pi]$). $\cos \alpha = x$, возьмем обратную функцию от обеих частей равенства: $\arccos(\cos \alpha) = \arccos x$, $\alpha = \arccos x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. В нижней полуплоскости решение будет симметричным главному решению: $\alpha = -\arccos x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Объединяя решения, получим общее: $\alpha = \pm \arccos x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2. $\sin \alpha = a$.

Рассмотрим следующие случаи:

а) $|a| > 1$. Прямая $y=a$ не имеет с единичной окружностью общих точек, поэтому уравнение $\sin \alpha = a$ не имеет решения.

б) $|a|=1$. Прямая $y=a$ с единичной окружностью имеет две точки соприкосновения: $(0,1)$

и $(0,-1)$. В точке $(0,1)$: $\sin \alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; В точке $(0,-1)$: $\sin \alpha = -1$, $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Частный случай: прямая $y=a$ пересекает окружность в точках: $(1,0)$ и $(-1,0)$. $\sin \alpha = 0$, $\alpha = 0 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

в) $|a| < 1$. Прямая $y=a$, пересекается с единичной окружностью, откуда получаем угол α ($\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). $\sin \alpha = x$, возьмем обратную функцию от обеих частей равенства:

$\arcsin(\sin \alpha) = \arcsin x$, $\alpha = \arcsin x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. В левой полуплоскости симметрично главному решению ($\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$): $\alpha = \pi - \arcsin x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Объединяя решения, получим

общее:

$$\alpha = (-1)^n \arcsin x + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Проведём ось тангенсов параллельно оси y и проходящую через точку $(1,0)$. На оси тангенсов построим точку $(1,a)$ и соединим с началом координат. Так получаем угол α ,

a -произвольное действительное число, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Решаем уравнение $\operatorname{tg} \alpha = a$, возьмем

обратную функцию от обеих частей равенства: $\arctg(\operatorname{tg} \alpha) = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. $\operatorname{ctg} \alpha = a$.

Проведём ось котангенсов параллельно оси x и проходящую через точку $(0,1)$. На оси котангенсов построим точку $(a,1)$ и соединим с началом координат. Так получаем угол α , a -произвольное действительное число, $a \in [0, \pi]$. Решаем уравнение $\operatorname{ctg} \alpha = a$, возьмем обратную функцию от обеих частей равенства: $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} \alpha) = \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \operatorname{arccctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Например:

1. Решить уравнение $\cos \frac{x}{3} = -1$.

Решение: зная, что решением уравнения $\cos y = -1$ является $y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = 3\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 3\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. Решить уравнение $\sin 2x = 1$.

Решение: зная, что решением уравнения $\sin x = 1$ является $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, получаем, что

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

Решение: так как решением уравнения $\operatorname{tg} x = a$ является $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, получим $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение тригонометрических уравнений.

Существуют различные методы решений тригонометрических уравнений, основными являются следующие:

I. Введение новых переменных;

II. Разложение на множители.

I. При решении уравнения методом введения новых переменных, надо помнить, что главную роль играет выбор функции, через которую выражается остальная функция. Если $\cos x$ входит в уравнение в чётных степенях, то, используя основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получим уравнение относительно $\sin x$, подставим $y = \sin x$. Таким же образом поступим, если $\sin x$ входит в чётных степенях.

Определение: уравнение вида

$$a_0 \sin x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$$

называется однородным тригонометрическим уравнением.

Если $\cos x = 0$, следовательно $\sin x = 0$, чего одновременно быть не может, тогда $\cos x \neq 0$.

Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{\cos^n x} \neq 0$, при умножении посторонние корни не появляются, так как преобразование равносильно. Тогда

$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \operatorname{tg} x + a_n = 0$. Введём переменную $y = \operatorname{tg} x$. Подставляем y в уравнение и решаем относительно y . Полученное решение подставляем вместо y .

II. Уравнения вида:

- 1) $a \sin x + b \cos x = c$, (*)
- 2) $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + m \cos^2 x = d$,
- 3) $a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + m \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = f$.

называются приводящимися к однородному.

Действительно, $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + m \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$; переносим все слагаемые в левую часть, приводим подобные и получаем однородные уравнения.

Рассмотрим несколько способов решения уравнения(*).

1) Универсальная подстановка, которая позволяет свести к рациональному уравнению любые тригонометрические уравнения:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Необходимо помнить, что при использовании формулы, приходит сужение области определения исходного уравнения и в результате может произойти потеря корня, т.к.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определен при $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то после решения уравнения необходимо выяснить,

является ли число $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ решением исходного уравнения.

2) Можно возвести обе части уравнения в квадрат, тогда получим уравнение второй степени, которое приводится к уравнению однородному.

Например: $a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2$

Зная, что при возведении в квадрат обеих частей уравнения, могут появиться посторонние корни, поэтому необходимо сделать проверку.

3) При решении данного уравнения можно преобразовать его, используя формулы двойного аргумента

Например: $a 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) = c(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})$, получим однородное

уравнение 2-й степени относительно $\sin \frac{x}{2}$ и $\cos \frac{x}{2}$

4) Данное уравнение можно решить методом введения вспомогательного угла. Разделим данное уравнение на $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1; \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi; \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$$

Тогда, используя формулу синуса суммы, получаем: $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad x = -\arccos \frac{\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}} + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Если уравнение содержит выражение $\sin x \pm \cos x$ и $\sin 2x$ или $\sin x \cos x$, то вводят переменную $y = \sin x \pm \cos x$. Тогда $y^2 = \sin^2 x \pm 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \pm 2 \sin x \cos x$.

Следовательно, $\pm \sin x \cos x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.