**Принципы минимакса, вариативности и творчества как ведущие принципы организации обучения математики в старших классах.**

Стремительные социальные преобразования, которые переживает наше общество в последнее десятилетие, кардинально изменили не только условия жизни людей, но и образовательную ситуацию. В связи с этим очень актуальным стало создание современного педагогического инструментария, который позволит учителю не на словах, а на деле обеспечить качественную реализацию нового социального заказа.

Если раньше приоритетной целью являлось «усвоение всей суммы знаний, которое выработало человечество», то в новых условиях на первый план выходит личность ученика, способность его к «самоопределению и самореализации», к самостоятельному принятию решений и доведению их до исполнения, к рефлексивному анализу собственной деятельности.

|  |
| --- |
| Закон РФ «Об образовании», ст.14.  «Содержание образования является одним из факторов экономического и социального прогресса общества и должно быть ориентировано на обеспечение самоопределения личности, создание условий для ее самореализации…» |

Какие качества необходимы современному выпускнику?

Разные люди отвечают на этот вопрос по-разному. Кто-то говорит о глубоких и прочных знаниях, другие – о воспитании, третьи – о развитии интеллектуальных и творческих сил детей, их умении учиться, формировании способности к саморазвитию…

Однако все и всегда сходятся в том, что школа должна помочь каждому ребенку стать счастливым: найти свое место в жизни, приобрести верных друзей, построить семью, самореализоваться в выбранной профессии.

Способность человека к реализации социально-значимой деятельности является базовой для его личностного развития. Понимание этого сформировалось в культуре уже сотни лет назад. «Главная цель воспитателя, - считал А.Дистервег, - должна заключаться в развитии самодеятельности, благодаря которой человек может впоследствии стать распорядителем своей судьбы, продолжателем образования своей жизни…» Об этом писали П.Ф.Каптерев и Д.И.Писарев, К.Д.Ушинский и Л.Н.Толстой, А.Н.Леонтьев и П.Я.Гальперин, В.В.Давыдов и Л.В.Занков, многие другие известные педагоги и психологи в нашей стране и за рубежом.

Встает вопрос: как обучать в новых условиях?

|  |
| --- |
| В.В.Анисимов, О.Г.Грохольская, Н.Д.Никандров  «Развитие личности осуществляется в процессе ее деятельности, а именно: деятельность имеет одним из продуктов, результатов развития самого субъекта. В нашем случае речь идет об учении как ведущем виде деятельности, обеспечивающим необходимые условия для успешного развития личности». |

Нынешнюю ситуацию в образовании можно представить в виде следующей схемы:

Система наглядного обучения

1. Принцип наглядности

2. Принцип доступности

3. Принцип научности

4. Принцип преемственности

5. Принцип системности

6. Принцип сознательного усвоения знаний

Дидактическая система, разработанная в Ассоциации «Школа 2100…» в рамках эксперимента, проведенного на базе Академии повышения квалификации и переподготовки работников образования МО РФ и Департамента образования г. Москвы дает ответ на вопрос о том, как обучать детей в деятельностной парадигме образования.

Система развивающего обучения

1. Принцип деятельности

2. Принцип непрерывности

3. Принцип целостного представления о мире

4. Принцип минимакса

5. Принцип психологической комфортности

6. Принцип вариативности

7. Принцип творчества

эжэоо

Подчеркнем, что представленная система дидактических принципов обеспечивает передачу детям знаний в соответствии с основными дидактическими требованиями традиционной модели школы. При этом она включает в себя идеи об организации развивающего обучения ведущих российских психологов и дидактов – В.В.Давыдова (принцип деятельности), Л.В.Занкова (принципы минимакса, вариативности), Ш.А.Амонашвили (принцип психологической комфортности) и др.

Таким образом, разработанная дидактическая система не отвергает традиционную дидактику, а продолжает и развивает ее в направлении современных образовательных целей.

Анализ показывает, что перечисленные дидактические принципы являются в определенной мере необходимыми и достаточными для организации процесса обучения новой парадигме образования. Так, принцип деятельности выделяет деятеля в базовом процессе и устанавливает требования к развивающим и воспитательным целям обучения; принцип непрерывности обеспечивает инвариантность реализуемой нормы; принцип целостного представления о мире устанавливает требования к содержательным целям обучения; принцип вариативности предусматривает возможность различных уровней достижения целей в соответствии с самоопределением обучающихся; принцип минимакса регламентирует процедуру контроля достижения образовательных целей; принцип творчества определяет границы высокого уровня подготовки по предмету; принцип психологической комфортности устанавливает требования к организации взаимодействия между учителем и учеником.

На этапе обучения в старших классах включение ребенка в учебную деятельность оказывает существенное влияние на формирование у него системы ценностей, для развития отношений в коллективе, в котором каждый его участник стремится определить место своей наибольшей эффективности. Учащимся предоставляется возможность анализа собственных способностей и потребностей, с тем, чтобы осмыслить собственные приоритеты. Поэтому на данном этапе основными являются принципы минимакса, вариативности и творчества.

Принцип минимакса заключается в следующем: школа должна предложить ученику возможность усвоения содержания образования на максимальном для него уровне (определяемом зоной ближайшего развития возрастной группы) и обеспечить при этом его усвоение на уровне социально-безопасного минимума (государственного стандарта знаний).

Принцип вариативности предполагает развитие у учащихся вариативного мышления, т.е. формирование способностей к систематическому перебору вариантов и адекватному принятию решений в ситуациях выбора.

Принцип творчества предполагает максимальную ориентацию на творческое начало в учебной деятельности школьников, приобретение ими собственного опыта творческой деятельности.

Установлено, что дидактические принципы деятельностного метода обучения, представленные выше, позволяют системно устранять факторы, негативно влияющее на психическое здоровье детей:

* принцип минимакса является саморегулирующимся механизмом разноуровневого обучения, обеспечивающим для каждого ребенка адекватную нагрузку и возможность успешного прохождения им индивидуальной образовательной траектории на уровне своего собственного максимума, но не ниже социально безопасного минимума;
* принцип вариативности обеспечивает возможность выбора каждым учащимся индивидуального темпа и уровня обучения;
* принцип творчества обеспечивает формирование у учащихся интереса к обучению, создание для каждого из них ситуации успеха.

ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В СООТВЕТСТВИИ С ПРИНЦИПАМИ МИНИМАКСА, ВАРИАТИВНОСТИ И ТВОРЧЕСТВА.

Вводим два стандарта:

* стандарт для обучения (уровень, который должен обеспечить учитель интересующемуся, способному и трудолюбивому ученику);
* стандарт обязательной общеобразовательной подготовки (уровень, который должен достичь каждый).

Пространство между уровнями обязательной и повышенной подготовки заполнено своеобразной «лестницей» деятельности, добровольное восхождение по которой от обязательного уровня к повышенному способно реально обеспечить школьнику постоянное пребывание в зоне ближайшего развития, обучения на индивидуальном максимально-посильном уровне.

Прежняя психологическая установка учителя: «ученик обязан выучить все, что дает ему учитель», новая психологическая установка для учащегося: «возьми столько, сколько сможешь, но не меньше обязательного».

Это особенно актуально с введением Единого государственного экзамена.

Обучение происходит на индивидуальном максимально-посильном уровне трудности, основанном на трех положениях:

* предупредить, а не наказать незнание;
* признать права ученика на выбор уровня обучения;
* ученик должен испытывать учебный успех.

Все это оптимизирует развивающую функцию учения (Л.В.Занков).

Анализ методологической, педагогической, научно-методической, психологической литературы показывает, что наиболее перспективными считаются три направления:

* укрупнение дидактических единиц;
* планирование результатов обучение;
* психологизация образовательного процесса.

В каждом из указанных направлений есть определенные достижения. Естественно предположить, что если удастся сплавить эти направления в нечто единое, целостное, интегральное, то результатом может оказаться мощная технология, позволяющая ученику изучать математику на необходимом ему уровне.

Рассмотрим блок уроков разноуровневого обучения.

* ВВОДНОЕ ПОВТОРЕНИЕ.

Изучение нового материала крупным массивом в математике должно обязательно предваряться вводным повторением (ВП). Это объясняется различием мотивации, возможностей, уровней, достижений учеников. Значимость вводного повторения очень велика, поэтому выделим его в отдельный модуль (это может быть целый урок или несколько минут от урока). В этом модуле ведущую роль играет учитель, так как только он знает, какая ранее изученная информация потребуется для введения нового материала. С другой стороны, ученики также должны активно участвовать, мыслить. Практически единственная форма, удовлетворяющая этим условиям, беседа. Учитель задает ученикам целесообразные вопросы. Ученики, отвечая, восстанавливают в оперативной памяти все необходимое.

* ИЗУЧЕНИЕ НОВОГО МАТЕРИАЛА (ОСНОВНОЙ ОБЬЕМ).

В классе всегда есть значительный контингент учеников, которые по данной теме ограничиваются материалом, соответствующим образовательному стандарту, минимумом. Насыщение содержания информацией «не для всех» приведет к появлению трудностей у учеников в отборе необходимого материала, да и просто непониманию. Поэтому при изучении нового материала в начале блока внимание уделяется только общеобязательному основному объему (ИНМ (о)). Кроме того, выдача материала дополнительного объема без закрепления, повлечет необходимость дополнительного повторения, т.е. непроизводительным потерям времени.

Для этого модуля предпочтительна форма лекции, позволяющая компактно передать ученикам укрупненную дидактическую единицу содержания материала.

Но необходимо помнить, что смысл укрупненной единицы не количественный, а качественный: наличие комплекса взаимно обратимых операций.

Если такую дидактическую единицу трудно выделить для объяснения, то можно использовать беседу, рассказ. Еще полезнее разумное их сочетание.

Каким образом будет организовано знакомство с новыми знаниями, зависит от темы и выбор всегда у учителя, но важно отметить – в ходе объяснения необходимо фиксировать на доске то самое главное, существенное, на что учащиеся должны в дальнейшем опираться. Составление конспекта учащимися во время лекции обязательно. (Приложение 1. Изучение темы «Решение показательных уравнений». Вводное повторение. ИНМ (о)).

* ТРЕННИНГ-МИНИМУМ.

Психологический принцип деятельности требует, чтобы изученный материал немедленно был отработан на задачах. Поскольку речь идет о задачах минимального уровня, то умение их решать должно быть отработано до автоматизма. Назовем эту часть закрепления «треннинг-минимум». Так как этот модуль предназначен для доведения умения решать шаблонные задачи минимального уровня до автоматизма, поэтому, сначала нужно задать шаблоны. Постепенно они должны перейти в самостоятельную работу учеников. Промежуточным шагом может быть использование практикума, когда класс делится на группы, и закрепление проходит через общение учащихся. В этом случае состав групп не учитывает уровневых достижений учеников, т.к. никаких уровней пока просто нет. (Приложение №2)

Очень часто у учителя возникают трудности в подборе однотипных задач, объединенных общей идеей решения. В этом хорошо может помочь «Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в ВУЗы» (с решениями и ответами), автор Р.Б.Райхмист. Москва. «Московский лицей» 1997г., а также «Тематические тесты. Математика. ЕГЭ-2011» Под редакцией Ф.Ф.Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион, 2011г.

* ИЗУЧЕНИЕ НОВОГО МАТЕРИАЛА (ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ОБЪЕМ).

Прежде чем перейти на последующие уровни обучения, необходимо познакомить учеников с информацией дополнительного объема, обеспечивающей работу на общем и продвинутом уровнях. Поэтому в структуре блоков уроков появляется еще один модуль изучения нового материала – ИНМ (д) (изучение нового материала (дополнительный объем)).

Особенность этапа ИНМ (д) состоит в том, что учащиеся по-разному нуждаются в новом и в том числе дополнительном материале. Одни должны разобраться во всем, другим полезно понять и усвоить идеи, третьим достаточно познакомиться только с содержанием. Почти идеальной формой для такого изучения нового материала является семинар.

Уроки ИНМ (д) можно проводить, используя технологию проектного обучения. (Приложение №3)

Заметим, что все уроки в рассмотренных модулях относительно мало зависят от результатов предшествующих им уроков, вследствие чего могут готовиться задолго до их проведения.

* РАЗВИВАЮЩЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ.

Теперь можно перейти к основной части закрепления, где и будут реализованы идеи систем задач, соответствующих планируемым результатам, групповые способы организации обучения, схема развития, динамика групп. Эту часть закрепления будем называть РДО – развивающим дифференцированным обучением. В этом модуле блока уроков необходимо реализовать схему развития для каждого ученика. Процесс осуществляется через активное использование групповой работы на семинаре-практикуме.

Часть учащихся на уроке объединяются в группы, и каждая группа получает задание на ограниченное время, по истечение которого группа отчитывается о своей работе в той или иной форме. Вариантов может быть много. Забота учителя – организовать неформальную защиту, чтобы задаваемые вопросы были значимы и интересны. Пока все группы заняты решением своих задач, учитель работает с остальной частью класса в нужном ему режиме: опрос, совместное решение задач, обсуждение сообщений учеников и т.д. За урок можно обсудить работу двух-четырех групп, но создать их можно больше. Группы, уровень задач которых существенно отличается от уровня, достигнутого основным составом класса, к «публичной защите» не привлекаются – в частности группа выравнивания. (Приложение №4)

* ОБОБЩАЮЩЕЕ ПОВТОРЕНИЕ.

Когда блок уроков подходит к концу, возникает необходимость обобщающего повторения (ОП), которое позволяет ученикам увидеть всю тему целиком. Не только опыт, но и теоретические соображения показывают, что одной из наиболее эффективных форм организации урока для обобщающего повторения в преддверии тематического или итогового контроля является консультация. На уроках-консультациях ученики могут задавать любые вопросы в связи со всеми домашними заданиями. Интересно организовать такие уроки в форме аукционов – когда задание, вызвавшее затруднения выставляется на аукцион с определенной начальной «стоимостью» и кто-то из учеников его пытается решить. В случае неправильного решения «стоимость» задания увеличивается, и за него берется другой и т.д. Можно перед решением трудных заданий устраивать «мозговой штурм».

* КОНТРОЛЬ.

Структура контрольной работы может быть традиционна: три задания минимального уровня, одно - два задания уровня1 и одно задание уровня2.

Проверку обязательного уровня можно проводить и в форме тестирования, тогда количество заданий минимального уровня увеличивается. В своей работе использую сборники тестовых заданий для тематического и итогового контроля.

- Алгебра. 7 класс. И.Л.Гусева, С.А.Пушкин, Н.В.Рыбакова. Общая редакция: А.О.Татур. «Интеллект-Центр». Москва. 2011

- Алгебра. 8 класс. В.В.Кочагин, М.Н.Кочагина. Москва. Эксмо. 2011

- Алгебра. 9 класс Л.В. Крайнева Интеллект-Центр. Москва.2011

- Алгебра и начала анализа. 10-11. И.Л.Гусева, С.А.Пушкин, Н.В.Рыбакова. Общая редакция А.О.Татур. «Интеллект-Центр» Москва. 2011.

- Интенсивная подготовка к ЕГЭ. 2011. Математика. Тематические тренировочные задания. В.В.Кочагин, М.Н. Кочагина. Москва. Эксмо. 2011.

- «Тематические тесты. Математика. ЕГЭ-2011» Под редакцией Ф.Ф.Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион, 2011г. Часть I. Часть II.

Важным фактором является не организационная форма, а то, чтобы каждый ученик прошел через проверку достижения обязательных результатов обучения и имел возможность проявить себя на повышенном уровне.

* Завершается блок УРОКОМ КОРРЕКЦИИ.

В результате получилась структура блоков уроков разноуровневого обучения, построенная на принципах минимакса, вариативности и творчества.

БЛОК УРОКОВ РАЗНОУРОВНЕВОГО ОБУЧЕНИЯ

|  |  |
| --- | --- |
| ВП | * Вводное повторение |
| ИНМ (о) | * Изучение нового материала (основного объема) |
| З.(Т-М) | * Закрепление. Тренинг-минимум |
| ИНМ (д) | * Изучение нового материала (дополнительный объем) |
| З.(РДО) | * Развивающее дифференцированное обучение |
| ОП | * Обобщающее повторение |
| Контроль | * Контрольная работа, зачет, тест и др. |
| Коррекция | * Урок коррекции знаний, умений и навыков |
|  |  |

ОЦЕНОЧНАЯ СИСТЕМА В СООТВЕТСТВИИ С ПРИНЦИПАМИ МИНИМАКСА, ВАРИАТИВНОСТИ И ТВОРЧЕСТВА.

Где и какие оценки может получить ученик на протяжении блока уроков?

На уроке вводного повторения возможны любые оценки, т.к. рассматривается ранее изученный материал, уже освоенный учениками на разных уровнях.

При изучении нового материала основного объема оценки не ставятся, поскольку здесь основную роль играет учитель, хотя возможны высокие поощрительные оценки за неожиданный вопрос, красивый пример и тому подобное.

На уроках тренинга-минимума оценки в журнал также не ставятся, т.к. здесь отрабатывается умение решать задачи минимального уровня, и оценками могут быть только «тройки». Но самооценка в тетрадь, а не в журнал используется часто.

На следующем уроке все участники семинара получают оценки и, как правило, высокие, т.к. они тщательно готовятся к выступлениям.

Далее мы переходим ко второму закреплению. Это уроки в форме семинара-практикума, и оценок на них ставят много. За урок ученик может поработать в двух группах, индивидуально, участвовать в обсуждениях или общеклассном решении задач – все это оценивается. Средняя оценка выставляется в журнал.

Оценка, полученная на уроке контроля абсолютна, т.к. отражает точно достигнутый учеником уровень. Когда подходит время ставить оценку за отчетный период (четверть, полугодие, год), учитываются две оценки от каждого блока уроков – средняя относительная и абсолютная контрольная.

Добрые отношения учителя с учащимися строятся на основании формулы общения с детьми:

«Я знаю, что ты хочешь знать математика.

Я знаю, ты можешь знать математику.

Я помогу тебе знать математику».

Необходимой является работа с родителями. Им надо объяснять свои требования и убедить, что их поддержка в стремлении ребенка достичь продвинутого уровня играет большую роль в его школьных успехах. Родителям обычно нравится, что применяемый мониторинг успешности заставляет вести строгий учет знаний каждого ученика, точно выявлять пробелы в его подготовке. И оценка каждого находится в его собственных руках. Число учеников, занимающихся на «хорошо» и «отлично» увеличивается, отношения к учебе становится более серьезным, а уровень подготовки более крепким и стабильным.

Результаты учащихся являются основным критерием успешности внедрения предлагаемой структуры блока уроков разноуровневого обучения.

Методика проведения уроков может быть самой разной, в зависимости от учебного периода, особенностей ученического коллектива. Но все эти вариации должны быть устремлены к одному – улучшению интеллектуального развития и психического здоровья учащихся.

Разноуровневое обучение наиболее оптимально для внедрения принципа минимакса: стандарту математического образования научить каждого, а способному и трудолюбивому обеспечить овладение продвинутым уровнем.

*«Воспитание достигло своей цели, когда человек обладает силой и волей самого себя образовывать и знает способ и средства, как это осуществить».*

*А.Дистерверг*

Приложение №1.

ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ: «РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

* ВВОДНОЕ ПОВТОРЕНИЕ
* ИЗУЧЕНИЕ НОВОГО МАТЕРИАЛА (ОСНОВНОЙ ОБЪЕМ)

Тема урока: «Решение показательных уравнений».

Тип урока: урок формирования знаний.

Учебные цели:

* формировать способность к обобщению, доказательству общих утверждений, способность к использованию свойств показательной функции в решении показательных уравнений;
* повторить и закрепить свойства показательной функции; повторить свойства степени;
* показать основные методы решения показательных уравнений.

Воспитательные задачи:

* формирование эстетических навыков при оформлении записей;
* воспитание внимательности и тактичности, взаимовыручки и взаимопомощи.

Развивающие задачи:

* развитие мыслительной деятельности;
* умения анализировать, обобщать, классифицировать;
* развитие речи.

Метод работы: объяснительно-иллюстративный.

Ход урока.

1. Организационный этап.
2. Проверка домашнего задания, воспроизведение и коррекция опорных знаний учащихся.

В форме беседы учитель задает вопросы, ученики, отвечая на них, зарабатывают жетоны для своего ряда.

Вопросы:

1. Определение показательной функции.
2. Область определения показательной функции.
3. Область значений показательной функции.
4. При каких значениях а, показательная функция *у = аx* возрастает? (убывает)
5. Заполнить пропуски:

а) при *а*>1 функция \_\_\_\_\_\_\_\_\_: если *х*1<*x*2, то *\_\_\_\_* 

б) при 0<a<1 функция \_\_\_\_\_\_\_\_: если *х*1<*x*2, то *\_\_\_\_* 

в) при *а*>0, *а*1 и  =, то *х1\_\_\_\_\_\_\_х2*.

6. Последнее утверждение доказать методом от противного.

Доказательство:

Предположим, что равенство *х1 = х2*не выполняется.

Пусть, например, *х1 < x2*. Тогда, если *а > 1*, то показательная функция возрастает и поэтому должно выполняться неравенство <, если 0<*а*<1, то функция убывает и должно выполняться неравенство >. В обоих случаях получилось противоречие с условием =.

Каждый правильный ответ на первые пять вопросов – жетон; за доказательство 6 вопроса – 3 жетона.

Задания 7,8 и 9 можно провести в форме диктантов: за определенное время учащиеся самостоятельно выполняют задания, а затем самопроверка по ответнику и самооценка. Каждые 5 правильных ответов – жетон.

7. Сравнить с единицей.

а) 2-5

б)  е)  к) 

в)  ж)  л) (- 1)2

г)  з)  м) 

д)  и)  н) 

8. Вычислить: а)  в) 155 : (7,5)5

б)  г) 

9. Полезные упражнения. Решить неравенства:

1. 2*х*>-1 
2. >-1 
3. >-1 
4. 2*tgx*>0 Z
5. 2*arcsinx* > 
6. 2*arctgx* > R
7. 2*x* > sinx – 1 R
8. 2*ctgx* > cosx – 1 Z
9. 2*x* >*arcsinx -  *
10. 2*arccosx* > arccosx -  **
11.  >  
12.  sinx R
13. >cosx 
14.  x2 + 1 *x=*0
15.  sinx+ 1 *x=*0
16.  1 – x2 *x=*0

Подведение итогов проведения вводного повторения: по максимальному количеству жетонов – «отлично».

1. Изучение нового материала (основной объем).

1.На доске написано несколько уравнений:

х2  = 16; 3х = 8; х3 = -27; 3х = 81;  = 16; = 5; х-2,5 = 1; 2х = ; ; ; cosx = ; .

Выбрать уравнения а) степенные;

б) с переменной в показателе;

в) прочие.

2. Как бы вы назвали уравнения с переменной в показателе?

3. Дадим строгое определение.

Показательными уравнениями называют уравнения вида

 , где а – положительное число, отличное от 1,

и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Наша цель – научиться их решать.

Попробуйте сами решить первые три из записанных.

* 1. 3х = 81
  2. 2х = 
  3. 

Чем мы пользовались для их решения?

Какое вызвало наибольшую трудность?

Какие свойства степени пришлось применить при его решении?

Попробуйте решить уравнение 4) . Какие еще свойства степени потребовались?

4. Решение показательного уравнения вида  (где а>0, а1) основано на доказанной на летучке теореме: если а>0, а1 и  =, то *х1 = х2*, т.о. уравнение  равносильно уравнению *f(x) = g(x)*.

Рассмотрим примеры:

1) 

2) 

3) 

4) 

Каждое уравнение учитель подробно прорешивает на доске.

Теперь попробуйте решить уравнение …

5. Решение уравнения вида  начинается с деления левой и правой частей уравнения на . Получим:  или

,

*f(x) = 0.*

Покажем это на примере решения уравнения .

А теперь самостоятельно решите уравнение .

6. А как подойти к решению уравнения ?

А если его немного преобразовать: ?

Рассмотрим решение показательного уравнения методом введения новой переменной.

 где >0, *а*1.

Пусть , где *t* >0,тогда уравнение примет вид:

.

Пример: 

Пусть , где *t* >0, тогда уравнение примет вид:





Учитывая, что *t* >0, имеем *t* =.

,

,

*х* = -1.

Ответ: -1.

Теперь попробуйте довести до конца уравнение 

7.Решите уравнение 2х = 5.

Как быть?

Возникает проблема: как представить число 5 в виде некоторой степени числа 2. Мы пока не знаем. Между тем мы можем убедиться в том, что это уравнение тоже имеет корень. Как в этом убедиться?

Решим его графически (учитель на доске показывает решение).

Убедились, что уравнение имеет единственный корень. А как его записать? Придется нам в дальнейшем еще раз вернуться к этому уравнению.

8. Подведем некоторые итоги.

Можно выделить три основных метода решения показательных уравнений:

* функционально-графический метод основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций;
* метод уравнивания показателей основан на теореме о том, что уравнение  равносильно уравнению *f(x)= g(x),* где а – положительное число, отличное от 1;
* метод введения новой переменной позволяет свести показательное уравнение к квадратному.

9. Попробуем систематизировать все решенные уравнения и составить конспект по изученной теме.

Учащиеся выдают свои версии, учитель помогает. В итоге предлагается плакат

«ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» (см. ниже)

10. Определение и разъяснение домашнего задания.

На дом вам предлагается: 1) п. 36;

2)классифицировать уравнения по методам решения:

№ 457а)б); 460а)б),461, 463а)б), 464а)б)

3) решить те, которые вам понятны;

4) попробовать решить «творческие»:

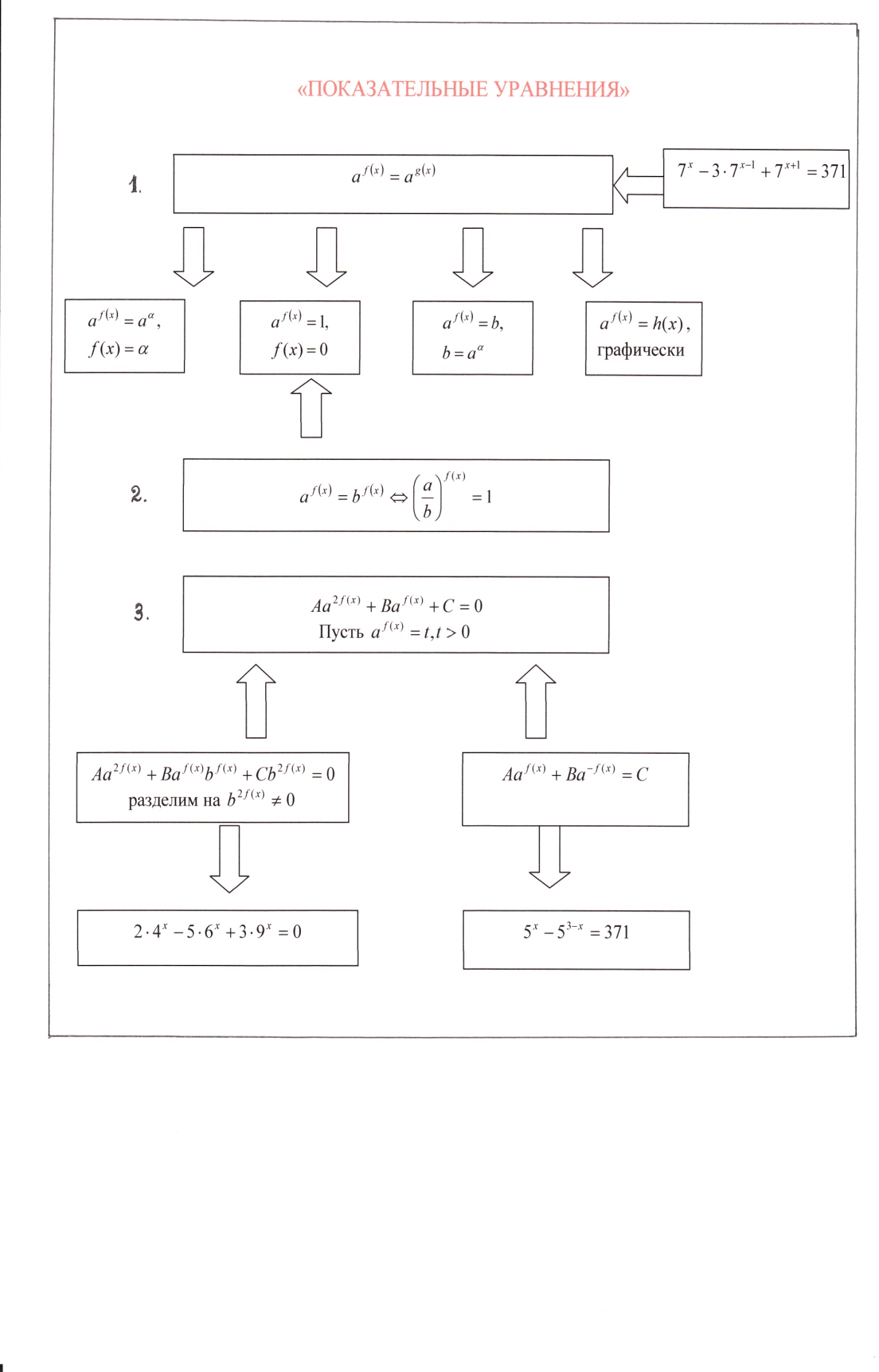
а) 

б) 

Дополнительные:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 

10. 



Приложение №2

Практикум «Решение показательных уравнений».

Учебные цели:

* закрепление и совершенствование умения решать показательные уравнения;
* воспитание внимания, трудолюбия, самостоятельности и самоконтроля;
* развитие мыслительной деятельности, умение анализировать, обобщать, классифицировать.

Методы работы: частично-поисковый, исследовательский.

Ход урока.

1. Организационный момент.

Класс делится на группы: по 4-5 человек.

1. Сообщение темы, постановка целей и задач урока.
2. Актуализация знаний.

На доске написано 7 уравнений. Вам предлагается их решить. К доске выходят 7 учеников, остальные работают в тетрадях.

Тренажер №1.

1. (0,8)х+2 = 1,25-4
2. 7х-7 = 49
3. =
4. 7х + 5 ∙ 7х-2 = 378
5. 2х-2 – 34-2х = 0
6. = 105 ∙ 15-х
7. 49х+1 + 55 ∙ 7х+1 – 56 = 0.

Взаимопроверка. Самопроверка.

Правильные решения сохраняются на доске весь урок.

1. Оперирование полученными знаниями, овладение способами деятельности.

На каждом столе лежат дидактические материалы: «тренажер №2», «тренажер №3» и «тренажер №4» по пять уравнений в каждом. Ученики работают в группах – кто лучше понял, помогает остальным. При затруднении можно получить консультацию учителя. Обязательна самопроверка при обсуждении решения каждого из тренажеров.

Тренажер №2.

1. =
2. (0,5)5х = 8-3
3. (4,5)3х =
4. 8-х+4 = 2
5. =

Тренажер №3.

1. =
2. =
3. 2х + 5 ∙ 2х-1 = 7 ∙ 2-5
4. 5х+2 – 12 ∙ 5х-1 = 565
5. =

Тренажер №4.

1. 7х-1 – 62-2х = 0
2. 53х – 7-2х = 0
3. 8 ∙ 3х = 243 ∙ 2х-2
4. 2,5 ∙ 4х = 8 ∙ 5х-1
5. 9х – 75 ∙ 3х-1 – 54 = 0

5. Самостоятельная работа.

Составляется в стольких вариантах, сколько человек в группе. Содержит пять уравнений, например:

1. =
2. 2х-1 = 2
3. =
4. 7 ∙ 6х – 6х+1 = 6-2
5. 100х – 70 ∙ 10х-1 – 30 = 0

6. Обобщение и систематизация знаний, полученных на уроке.

7. Анализ и оценка итогов работы.

На протяжении всего урока тренинга-минимума наблюдается работа каждой группы – одни приглашаются к доске, другие проверяют свои решения по готовым решениям.

Проводится итог по работе каждой группы. Результаты самостоятельной работы заносятся в таблицу «Мониторинг успешности».

8. Разъяснение домашнего задания.

№462, 463в)г), 464в)г), 468а)г), 469а)в).

Творческое задание: 1. 8∙- 7∙=0

1. Найти сумму корней уравнения х3 ∙ 3х-1 + 125 = 125 ∙ 3х-1 + х3

Приложение №3.

Урок – семинар: «Стандартные и нестандартные приемы решения

показательных уравнений».

Учебные цели:

* продолжить изучение методов решения показательных уравнений;
* рассмотреть решение уравнений вида Аа2f(x)+Baf(x)b f(x)+Сb 2f(x)=0 и вида Ааf(x)+=В;
* изучить возможность применения свойств функций к решению уравнений – ограниченность функций в методе мажорант и свойств монотонности;
* систематизировать и совершенствовать знания графического решения уравнений;
* воспитывать дисциплину умственного труда;
* развивать логическое мышление.

**Метод проектов.**

* 1. Класс разбивается за 2 недели до семинара на четыре группы:

Группа «А» работает над методом мажорант: изучает теорию под руководством учителя, подбирает уравнения, решаемые этим методом, готовит информационный плакат (опорный конспект по теории; примеры; используемая литература).

Группа «Б» изучает применение монотонности функций к решению уравнений, подбирает уравнения, решаемые этим способом, готовит информационный плакат.

Группа «В» отбирает уравнения, которые невозможно решить, основываясь на свойствах ограниченности и монотонности функций, и готовит сообщения о графическом решении таких уравнений, плакаты с решенными уравнениями.

Группа «С» подбирает уравнения вида Аа2f(x)+Baf(x)b f(x)+Сb 2f(x)=0 и вида Ааf(x)+=В, разбирается в методах их решения.

* 1. Все четыре группы на семинаре представляются как группы «специалистов».
  2. Каждая группа специалистов выбирает:
     + «теоретика», который на семинаре делает доклад о методе;
     + двух «экспертов» - учеников, всех лучше разобравшихся в методе;
     + остальные «специалисты» будут выполнять роль «экспериментаторов» - прорешивать у доски любые уравнения из предложенных.
  3. На семинар приглашаются «крупные специалисты» - учителя математики – при возникновении спорных вопросов «специалисты» могут обратиться за помощью к «крупным специалистам».
  4. Каждая группа получает полный список уравнений, в котором каждому уравнению присваивается номер в общем списке – при анализе способа решения все должны видеть его в общем списке.

План семинара.

1. Разминка.

Решение показательных уравнений стандартными методами. Выступление экспертов.

1. Доклад. «Метод мажорант». Выступление «теоретика» группы «А».
2. Эффективность метода мажорант при решении уравнений. Выступление «экспериментаторов» группы «А».
3. Доклад «Использование свойств монотонности функций». Выступление «теоретика» группы «Б».
4. Эффективность использования свойств монотонности функций:
   * устная работа всех «специалистов»;
   * выступление «экспериментаторов» группы «Б».
5. Разные способы решения одного уравнения.
6. Использование графического способа:
   * выступление «теоретика» группы «В»;
   * письменная работа всех специалистов;
   * отчет «экспериментаторов» группы «В».
7. Доклад «теоретиков» группы «С».
   * решение уравнений у доски «экспериментаторами» группы «С»;
   * самостоятельно всеми группами решение уравнений, предложенных группой «С».
8. Подведение итогов семинара.

Рекомендации участникам семинара.

1. Домашнее задание.

Ход семинара.

1. *Вступительное слово учителя.*

«Я рада вам представить четыре группы «специалистов»:

- «специалисты» в методе мажорант – представление каждого;

- «специалисты» в использовании свойств монотонности функций…;

- «специалисты» графического способа решения уравнений…;

- «крупные специалисты» в использовании всех перечисленных методов.

* На семинаре каждая группа будет «обучать» всех остальных применению своего метода, показывая его эффективность.

Но начнем мы с небольшой разминки. У каждой группы специалистов список уравнений урока:

**Показательные уравнения.**

1) Разминка

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

2)

|  |  |
| --- | --- |
|  | {1} |
|  | {0} |
|  | {2} |
|  | {-1} |
|  | {0} |
|  | {2} |
|  | {2} |
|  | {2} |
|  | {2} |
|  | {2;0} |
|  | {5} |
|  | {2} |
|  | {3} |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Среди них есть уравнения, решаемые традиционными методами.

Приглашаются эксперты от каждой группы специалистов. Из большого числа задач выбрать задачи, решаемые стандартными методами. Эксперты все одновременно прорешивают каждый свое уравнение на доске.

Теоретики каждой группы рассказывают о их методах решения.

Когда работа экспертов у доски завершена, крупные специалисты комментируют их результаты. Участники семинара могут задавать вопросы – оценивается активность каждой группы.

1. *С докладом о методе мажорант* *приглашается теоретик группы «А».*

**«Метод мажорант»**

Не расширяя теоретических знаний, не выходя за рамки программы по математике, можно рассмотреть метод решения определенного вида уравнений, основанный на применении свойства ограниченности некоторых функций – метод мажорант.

Мажорант данной функции f(х) на множестве Р называется такое число М, что либо f(х)≤М для всех *х* є Р, либо f(х)≥М для всех *х* є Р.

Мы знаем много мажорант для известных функций. Например, любое число, большее или равное 1 будет мажорантой для функции y=sinx и y=cosx на любом множестве.

Основная идея метода мажорант состоит в следующее – пусть мы имеем уравнение f(х) = g(х) и существует такое число М, что для любого х из области определения f(х) и g(х) имеем f(х)≤М и g(х)≥М. тогда уравнение f(х) = g(х) равносильно системе  

как искать такое число М? можно найти наибольшее или наименьшее значение функции с помощью производной.

Но чаще всего производная не требуется.

Часто используются неравенства:

 при а>0 и  при а<0.

Равенство достигается только при а=±1.

 при а≥0, b≥0 (среднее геометрическое двух чисел не превосходит их среднего арифметического. Равенство достигается при а=b).

Приведите примеры:

Решить уравнение 

Решение:

1) , как сумма двух положительных взаимно обратных величин.

2)  при всех х є (-∞;0]∪[1;+∞), тогда

,

1-,

.

3) Равенство в данном уравнении возможно лишь тогда, когда его левая и правая части одновременно принимают значение 2, т.е. выполняется система:



Ответ: х=0.

1. *Вы выслушали доклад «Метод мажорант». Вам предлагается в общем списке уравнений найти уравнения, которые возможно решить методом оценки.*

Группы специалистов работают 1 мин. Эксперты каждой группы представляют свое мнение, крупные специалисты соглашаются или не соглашаются.

Экспериментаторы группы «А» начинают прорешивать предложенные уравнения у доски.

|  |  |
| --- | --- |
| 1) | {1} |
| 2) | {0} |
| 3) | {2} |
| 4) | {-1} |

Обратите внимание, насколько разнообразны уравнения-функции, входящие в левую и правую части уравнений содержат и показательные выражения и тригонометрические.

При возникновении вопросов по ходу решения теоретики и эксперты группы «А» должны помочь своим экспериментаторам на них ответить грамотно.

Крупные специалисты отмечают активность и подготовленность каждой группы.

Подводится итог. *Действительно, красивые уравнения подобраны ребятами, они сами смогли разобраться в них, применяя метод мажорант и очень доступно, понятно показали нам его эффективность. Молодцы.*

* Теперь попробуйте сами решить уравнения:
  1.  {-1}

Решение проговаривается устно.

* 1. 

Решают в тетрадях, один из экспериментаторов группы «Б» записывает решение на доске. Решение сохраняется!

1. *Приглашается докладчик по следующему вопросу: «Использование свойств монотонности функции».*

Использование свойств функций при решении уравнений для нас не ново. Действительно, область определения функций используется при решении, например, иррациональных уравнений. Очевидно достаточно учесть область определения функции , чтобы указать решение уравнения 

Отыскать посторонние корни уравнения часто помогает напоминание области значения функции. Например, получив при решении уравнения, вспомогательного для тригонометрического уравнения , корни 1 и -7, сразу исключаем из рассмотрения число -7, так как его нет в области значений функции . Метод мажорант использует такое свойство как ограниченность**.**  Я в своем докладе остановлюсь на применении свойств монотонности функций.

Мы знаем теорему (о корне).

1. Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, число а – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение f(х) = а имеет единственный корень в промежутке I.
2. Если функция f на множестве I возрастает, а функция g на множестве I убывает, то уравнение f(x)=g(x) не может иметь на множестве I более одного корня.

Метод, основанный на этих утверждениях состоится в следующем:

1. Выделить функции.
2. Установить и обосновать характер монотонности каждой функции в ее области определения.
3. Подобрать корень уравнения.
4. Обосновать, ссылаясь на приведенные утверждения, что других корней нет.
5. Записать ответ.

Пример 1: 5х=6-х

1. Рассмотрим функцию f(х)=5х . Показательная, с основанием больше 1, поэтому возрастающая на R.
2. Функция g(x)=6-х линейная, убывающая на R, так как угловой коэффициент отрицательный.

Уравнение имеет не более одного корня.

При х=1 имеем 51 = 6-1,

5 = 5 – истинное равенство,

значит, х=1 – корень данного уравнения.

Пример 2: 9х + (х -13)\*3х – 9х + 36 = 0

Введем вспомогательную переменную t=3х, t>0.

Уравнение примет вид приведенного квадратного относительно t

t2 + (х-13)\*t - 9(x-4)=0, где

а = 1, b = х-13 и с = -9(х-4).

Попробуем решить по теореме, обратной теореме Виете.

Поскольку 9\*(4-х)=с и 9+4-х = 13-х = -b,

Значит t1=9 и t2=4-х.

Перейдем к переменной х.

* + 1. 3х=9,

х=2;

* + 1. 3х=4-х.

Левая часть уравнения – возрастающая показательная функция (3>1); правая часть уравнения – убывающая линейная функция. Уравнение имеет не более одного корня. При х=1 равенство выполняется, других корней уравнения 3х=4-х не имеет.

Ответ: {2;1}.

* + *Примеры докладчиком были подобраны очень удачно – от простого к сложному.*

Экспертам группы «Б» предлагается из списка устно решаемых показательных уравнений выбрать иллюстрирующий их метод и рассказать решение.

В обсуждении принимают участие все группы специалистов. Крупные специалисты оценивают работу каждой группы.

* + Затем экспериментаторам группы «Б» предстоит показать решение на доске трех уравнений.

1. 3х+4х=5х {2}
2.  {2}
3.  {2}

Ученика, решившего уравнение №2 спросить, почему сразу нельзя было применить монотонность функций.

Ответ: изменяя характер монотонности функции, стоящей в левой части уравнения делением на положительную величину легко обосновываем единственность корня.

* + Разнообразны были уравнения и у второй группы специалистов, при решении которых требуются знания ранее изученного материала.
  + Попробуйте проверить свое понимание применения метода в уравнении

х\*2х=х(3-х)+2(2х-1) {2;0}

Группы специалистов сначала работают в тетрадях, обсуждая решение. Затем экспериментаторы от групп «А» и «В» показывают у доски их решения.

Крупные специалисты не забывают оценить работу каждой группы.

1. Обратимся к уравнению 

До этого оно было решено экспериментатором группы «А»:

1. 

2.  Ответ: х=2.

*Давайте повнимательнее присмотримся к уравнению.* Кто заметил в нем какую-то особенность?

Переобозначим х2-4х=t, тогда уравнение примет вид: -t=2t+6

Кто сможет довести решение до конца?

Уравнение дорешивают, используя убывание функции левой части и возрастание правой. Получают t=-4.

х2 - 4х = -4, х2 - 4х+4 = 0, (х - 2)2 = 0, х = 2.

Способы решения сравнивают.

* Предлагается еще устно решить несколько уравнений.

Группы поочередно рассказывают решения выбранных уравнений.

1. 76-х=х+2 {5}
2.  {2}
3. 3х-1+5х-1=34 {3}
4. 2х=4х

Последнее уравнение решить не получается. Получилось: х=4. а может уравнение имеет еще один корень? Как в этом убедиться?

Какой метод позволяет нам установить имеет ли уравнение корни и сколько их?



* *Приглашается теоретик группы «В», который напомнит вам хорошо известный графический метод решения уравнений.*

**Графический метод решения уравнений.**

Пусть дано уравнение f(x)=g(x). Графическим решением уравнения является абсцисса точки пересечения построенных графиков. Поэтому решение этим методом начинается с построения в одной системе координат графиков функций y=f(x), y=g(x).

Умение строить графики функций и простейшие подмножества плоскостей помогает при решении нестандартных задач. Эти графики могут подсказать, что у уравнения нет решений или подсказать сколько корней имеет уравнение.

Построим графики функций у=2х и у=4х. теоретик работает у клетчатой доски, все подробно рассказывая, а все специалисты в тетрадях…

Делается вывод, что уравнения имеет два корня: х1-4 и 0<x2<1.

* Графически мы решаем уравнение каждый год и для всех этот метод хорошо отработан, поэтому предлагается каждой группе специалистов решить несколько подобранных уравнений на скорость, грамотно оформив решение.

Группой «В» все эти уравнения прорешаны заранее, графики подготовлены на плакатах и проверка проводится очень быстро.

Крупные специалисты оценивают работу каждой группы.

1. 2х-1=х+1
2. 2IxI=х+1
3. 4х+1=6-х
4. 3-х=-3/х
5. Выступают специалисты группы «С». Решение показательного уравнения вида

Aa2f(x)+Baf(x)bf(x)+Cb2f(x)=0

начинается с деления левой и правой части уравнения на b2f(x)≠0

 и сводится заменой , t>0 к квадратному.

Пример: 

Пусть  t>0.

3t2-5t=2=0, t=2/3, t=1.

х=1/2, х=0 Ответ: 0;1/2.

Решение уравнения Ааf(x)+Ca-f(x)=B тоже легко сводится к решению квадратного.

Показывает решение уравнения 22+х - 22-х =15.



* Решение уравнений у доски экспериментаторами группы «С».

1. 5х-53-х=20;
2. 2\*4х-5\*6х+3\*9х=0

* Решение уравнений в группах

1. 4\*22х-6х=18\*32х
2. 5х-24=25/5х
3. Подводятся итоги семинара.

Специалисты обобщают какие нестандартные приемы решения уравнений они научились применять.

Крупные специалисты оценивают работу каждой группы теоретиков, экспертов, экспериментаторов.

Подчеркивается, что все-таки сначала необходимо пробовать традиционные подходы в решении. И только если не получается – присмотреться к уравнению, применяя каждый из изученных сегодня примеров.

Кто хочет продолжить свою работу в изучении этих методов вам помогут книги:

1. Ткачук В.В. «Математика – абитуриенту». Том 1 и 2. МЦНМО, ТЕИС, 2012.
2. Шабунин М. «Математика», Москва. Лаборатория Базовых Знаний, 2002
3. Мерзляк А.Г., Полонских В.Б., Якир М.С. «Алгебраический тренажер» «Илекса», «Гимназия», Москва – Харьков, 2013
4. Назаренко А.М., Назаренко Л.Д. «Тысяча и один пример», Сумы «Слобожанщина»,2010.
   * Домашнее задание

Решить уравнения:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

7) Найдите произведения корней уравнения. .

8) В ответе записать сумму корней. .

9) Найдите наименьший корень уравнения. 

10) Найдите произведение корней. 

**ПРИЛОЖЕНИЕ №4**

* РАЗВИВАЮЩЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ.

Семинар-практикум «Решение показательных уравнений».

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Учебные цели:

* проконтролировать степень усвоения решения показательных уравнений;
* обобщить и систематизировать изученное на предыдущих уроках;
* дать возможность ученикам применить свои знания на новом уровне, в работе над нестандартными заданиями;
* воспитание самостоятельности, аккуратности, самоконтроля;
* развитие мыслительной деятельности: умения анализировать, обобщать, классифицировать.

Методы работы: эвристический, исследовательский.

Ход урока.

1. Организационный этап.
2. Сообщение темы, постановка целей и задач урока.

Мотивация учебной деятельности учащихся.

1. Актуализация знаний.

Летучка в двух вариантах.

Решить пять уравнений.

Вариант I. Вариант II.

1. = 1) =
2. = 2) =
3. 43х = 82х  3) 41х = 72х
4. 3х – 2 ∙ 3х-2 = 7 4) 4х – 3 ∙ 4х-2 = 13
5. 32х – 4 ∙ 3х = 45 5) 22х + 2х ∙ 8 = 20

Самопроверка.

1. Воспроизведение знаний на новом уровне.

Правильно решившие все пять уравнений «летучки» переходят к выполнению заданий Уровня 1.

Вариант 1. Вариант 2.

1. 2х – 8 ∙ 2-х = 7 1) 3х – 9 ∙ 3-х = 8
2. = 3 2) = 1
3. - 9 ∙ + 2 = 0 3) 3 ∙ - 10 ∙ + 3 = 0
4. 4х+1 + 41-х – 10 = 0 4) 31+х – 2 ∙ 31-х = 7
5. - 32 = 4 ∙ 5) - 5 ∙ = 6

Допустившие ошибку получают еще пять уравнений минимального уровня.

Правильно решившие все пять уравнений Уровня1 переходят к выполнению заданий Уровня 2.

1. - = -
2. х ∙ 3х-1 + 3 ∙ = 3х  + х ∙
3. х2 ∙ + 22-х = +2 + х2 ∙ 2-х
4. 4х+1 – 6х = 2 ∙ 32х+2
5. = 3 ∙ - 4

Допустившие ошибку получают еще пять уравнений Уровня1. И т.д.

Таким образом, организовываются группы, решающие уравнения минимального уровня, Уровня1, Уровня2.

1. Работа над нестандартными заданиями.
2. Прошедшие все три уровня выделяются в группу, которым предлагаются показательные уравнения, решаемые нестандартными методами и показательные уравнения с параметром.

Творческие задания:

1. 3 = 3 ∙ 2х+1 – 22х - 2
2. При каких значениях параметра α уравнение 4 ∙ + 12 ∙ = 27 ∙ имеет своим корнем число -7?
3. Найдите все значения параметра α, при которых уравнение х2 + 4 ∙ 5а + 5х = 5а  ∙ х имеет единственное решение.
4. Найдите сумму корней уравнения 4х – (7 – х) ∙ 2х + 12 – 4х = 0
5. Найдите все значения параметра α, при которых уравнение 9х + 5 ∙ 3х + 64 = а2 не имеет корней.
6. Анализ и оценка итогов работы, формирование выводов по изученному материалу.
7. Определение и разъяснение домашнего задания.
8. стр. 223: №468 б)в), 469 б)г), 470;
9. стр. 286: №163 б)г), 164 г), 165 б)г), 166 б)г).

Творческое задание (см. выше).

P.S. Можно найти возможность с определенной группой учеников рассмотреть показательно-степенные уравнения.

Особняком стоят уравнения, содержащие функции вида (а(х))f(x), где а(х)>0.

Уравнение

а(х) = 1,

=а(х f(x) = g(x),

a(x) > 0.

Замечание: Мы не решаем уравнение (-2)х = -8, потому что показательная функция не определена при а = -2.

Пример:

Решите уравнение =

Решение.

1. х = 1
2. =-2-3х,

х>0;

х=-1

х=-2,

х>0 Система решений не имеет.

Несмотря на то, что (-1)1 = (-1)1, (-2)4 = (-2)4, числа -1 и -2 мы в ответ не включаем. Ответ 1.

В школьных учебниках нет ни единого слова о свойствах функции у= а(х)f(x) и нет алгоритма нахождения корней в подобных примерах.

В аналогичных заданиях ЕГЭ сразу указывается, что надо найти положительные решения – поэтому путаницы не возникает.

В определенных пособиях, например, в пособии для школьников и абитуриентов А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир Алгебраический тренажер. «Илекса» «Гимназия» Москва-Харьков 2013 на стр. 179 объясняется подробный алгоритм решения показательно-степенных уравнений, состоящий из четырех типов с обязательной проверкой:

1) а(х)=1 3) а(х)=0

2) а(х)=-1 4) f(x)=g(x).

Тренажер по решению показательно-степенных уравнений можно взять из названного выше пособия, стр.180.