Задачи для проведения муниципального этапа олимпиады в 2014-2015 учебном году (условия и решения).

УДАЧИ ВСЕМ УЧАСТНИКАМ ОЛИМПИАДЫ!!!

7 класс

1. Мастеру и его ученику было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как мастер проработал 7 часов, а ученик 4 часа, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно ещё 4 часа, они установили, что остаётся выполнить $\frac{1}{18}$ всей работы. За какой промежуток времени выполнил бы всю работу ученик, работая один?

Комментарий к решению:

Весь объём работы примем за 1. Пусть x, y –производительности труда за час мастера и ученика соответственно. По условию

$$\begin{cases} 7x + 4y = \frac{5}{9}, \\ 7x + 4y + 4(x + y) = 1 - \frac{1}{18}. \end{cases}$$

Решив данную систему, получаем, производительность работы ученика $y = \frac{1}{24}$.

Ответ: 24 часа.

2. Решите ребус: каждую букву «А» нужно заменить цифрой, причём за буквой «А» может находиться любая цифра!

$$\begin{array}{r} \mathbf{AAA} \\ * \ \underline{\mathbf{A2A}} \\ \mathbf{AAA} \\ + \ \mathbf{AA7A} \\ + \ \underline{\mathbf{A8A}} \\ \mathbf{AAA42A} \end{array}$$

Решение: так как второе частное произведение – четырёхзначное число, а два других – трёхзначные, то во втором сомножителе на первом и третьем местах стоят цифры, меньшие 2. Т.е., эти цифры могут быть 1 и 1 или 1и 0. (Обосновать, почему не подходит вариант 1и 0.) Итак, на первом шаге получим число121.

Так в пятой строчке цифра 8 получена при умножении числа десятков первого сомножителя на 1, то получим посредине первой и третьей цифру 8 (А8А). Чтобы получить на четвёртой строчке цифру 7, число единиц первого сомножителя должно быть равно 7 (А87). Чтобы получить в ответе в разряде сотен цифру 4, в разряд сотен первого сомножителя надо поставить цифру 9 (987).

3. Собака, находясь в точке *A*, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 метров от собаки в точке *B*. Скачок собаки равен 2 метра, скачок лисицы – 1 метр. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от точки *A* собака догонит лисицу?

Решение: Промежуток времени, за который собака пробегает 4 метра (2 скачка), лисица пробежит только 3 метра (3 скачка), следовательно, расстояние между ними сокращается на 1 метр. Начальное расстояние между собакой и лисицей равно 30 метров, поэтому собака догонит лисицу на расстоянии 120 метров от точки А.

Ответ: 120 метров.

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ y+z+t=4, \\ z+t+x=-3, \\ t+x+y=1. \end{cases}$$

Решение (указание): вычитая последовательно, например, первое и второе. Это вполне возможно. Либо складывая все четыре, затем вычитая из последнего можно найти какую-либо переменную, и т.д. Найдите оставшиеся неизвестные.

Ответ: $x=-2$; $y=5$; $z=1$; $t=-2$.

5. Сколькими нулями оканчивается число, полученное от умножения всех чисел натурального ряда от 1 до 100?

Решение: Обозначим N= 1·2·3·…·100. Число нулей этого произведения равно числу множителей его, кратных десяти. Но 10=2·5, поэтому число нулей на конце данного произведения соответствует числу пар множителей 2 и 5. На 2 делятся все чётные числа произведения 1·2·…·100, на 5 делятся числа, оканчивающиеся цифрами 5 и 0; последних множителей меньше, поэтому достаточно определить их. Множителей, кратных 5, будет 20, кроме того, 4 множителя, кратных 25. Всего 24 пары множителей 2·5.

Ответ: число оканчивается 24 нулями.

6. (С. Берлов) На клетках доски $n\times n$ $(n > 1)$ расставлены фишки трёх цветов. Оказалось, что рядом с любой фишкой стоят фишки других цветов. Докажите, что какие-то фишки одного цвета стоят рядом (две фишки стоят рядом, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону).

Решение: (Можно доказать от противного) Предположим, что, вопреки утверждению задачи, существует удовлетворяющая условию расстановка фишек на доске, при которой у любой фишки есть два соседа двух других цветов. Рассмотрим левую нижнюю клетку доски. В двух соседних с ней клетках должны располагаться фишки обоих других цветов. Без ограничения общности можно считать, что в клетке 1 – белая, 2 – красная, 3 – синяя фишка (см. рис.)

<table>
<tr><td colspan="7">…..

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td></td><td></td><td>B</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td></td><td></td><td>A</td><td>C</td></tr>
</table>

Тогда в клетке 4 может находиться только белая фишка (в соседних с ней клетках 2 и 3 уже есть синяя и красная фишки). Но тогда в клетке 5 – красная фишка (фишка красного цвета должна стоять рядом с синей фишкой из клетки 3). Тогда сразу получаем, что в клетке 6– синяя фишка ит.д. Мы получили однозначное восстановление расположения фишек на доске по фишкам из клеток 1,2 и 3. Заметим, что при этом в парах клеток 1 и 4, 3 и 6, 5 и 8, …, A и B стоят фишки одного цвета. Значит, рядом с фишкой из клетки C нет фишки одного из двух других цветов. Противоречие.

8 класс

1.Вычислите произведение:

$$\mathbf{P}=\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\right)\ldots\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}\right).$$

Решение: Упростим выражение :

$$P=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

Полученное произведение можно сократить на $2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot(n-1)^2\cdot n$.

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $\frac{n+1}{2n}$.

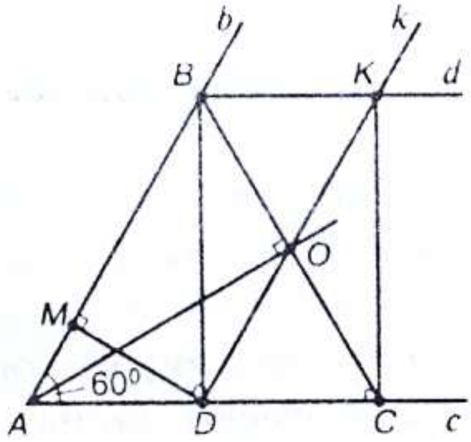
2. **Что больше:** $\frac{9999998}{6666665}$ **или** $\frac{6666667}{4444445}$**?**

Решение: Обозначим 1111111 через a. Тогда первая дробь равна $\frac{9a-1}{6a-1}$, а вторая $-\frac{6a+1}{4a+1}$, составляя разность, получаем очевидное. Больше первая дробь.

Ответ: первая дробь.

3. Даны угол в 60^0 и угольник, с помощью которого можно проводить прямую через две точки и проводить через точку прямую, перпендикулярную любой из нарисованных прямых. Разделите с помощью угольника данный угол (в 60^0) пополам.

Решение: В задаче требуется построить биссектрису угла. Биссектриса данного угла с вершиной А является высотой АО в равностороннем треугольнике ABC. Построим такой треугольник.



Построим такой треугольник. Восставим из произвольной точки $D \in Ac$ данного угла перпендикуляр до пересечения со стороной угла *Ab* угла в точке *B*. Проведём луч $Bd \perp BD$. Он будет параллельным лучу Ac. Опустим перпендикуляр *DM* на луч Ab, затем проведём луч $Dk \perp DM$, тогда $Dk \parallel Ab$. Пусть точка *K* – точка пересечения Bd и *Dk*, тогда *ABKD* – параллелограмм, у которого $BK=AD=\frac{1}{2}AB$. Пусть $KC \perp Ac$, тогда $DBKC$ – прямоугольник ($DC = BK$). Таким образом, $AC=2BK = AB$ и $\Delta\, ABC$ – искомый.

4. Некоторая сумма денег находилась на сберегательной кассе под 2% годовых. Через некоторое время эта сумма была взята вместе с полученными на неё процентными деньгами, что составило 8502руб. Если бы эта же сумма была отдана под 3% годовых, но сроком на 1 год меньше, то процентные деньги с неё составили бы 819 руб. Какова была сумма денег, положенная в сберкассу, и сколько времени она там находилась?

Решение: Обозначим через *x* деньги, положенные на сберкнижку в кассу, через *t* – время, выраженное в годах. Тогда доход за один год составит $0{,}02x$, а через *t* лет – $0{,}02x\cdot t$. Доход под 3% за $(t-1)$ лет будет равен $0{,}03x(t-1)$. Составим систему уравнений: $\begin{cases} x + 0{,}02xt = 8502, \\ 0{,}03x(t-1) = 819. \end{cases}$ Решая которую, получим $t=4{,}5$, т.е. 4 года 6 месяцев, $x=7800$ руб.

Ответ: 7800 руб., 4 года 6 месяцев.

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \boldsymbol{xyz = -6,} \\ \boldsymbol{yzt = 6,} \\ \boldsymbol{ztx = -12,} \\ \boldsymbol{txy = 4.} \end{cases}$

Решение: перемножив все четыре уравнения, найдём $xyzt$. Разделив последнее уравнение на первое, второе, третье, четвёртое уравнения системы найдем x, y, z, t.

Ответ: (2;-1;3;-2).

6. **Найдите все значения a, при которых уравнение $4x - \left|3x - |x + a|\right| = 9|x - 1|$ имеет хотя бы один корень.**

Решение: (существует несколько способов решения данной задачи) Рассмотрим функцию $y = 4x - \left|3x - |x + a|\right| - 9|x - 1|$. Заметим, что при $x \geq 1$ модули раскроются с такой возможной комбинацией знаков: $4 \pm (3 \pm 1) - 9$ – наклон отрицательный, и функция убывает. Если же $x \leq 1$, то модули раскроются с такой возможной комбинацией знаков: $4 \pm (3 \pm 1) + 9$, откуда следует, что в любом случае наклон положителен, и функция возрастает. Поэтому при $x = 1$ функция принимает максимальное значение, а уравнение $4x - \left|3x - |x + a|\right| = 9|x - 1|$ имеет хотя бы один корень, если:

$$y(1) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - \left|3 - |1 + a|\right| \geq 0 \Leftrightarrow \left|3 - |1 + a|\right| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - |1 + a| \leq 4, \\ 3 - |1 + a| \geq -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |1 + a| \geq -1 \Leftrightarrow x \epsilon R, \\ |1 + a| \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow -8 \leq a \leq 6.$$

Ответ: $[-8; 6]$.

9 класс

1. **Решите в целых числах уравнение и в ответ записать сумму квадратов $x^2 + y^2$ соответствующего уравнения: $x^2 + 4x - 3xy - 6y + 2y^2 + 1 = 0$.**

Решение:
$x^2 + 4x - 3xy - 6y + 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x(4 - 3y) - 6y + 2y^2 + a - a + 1 = 0 \ldots \Rightarrow D = y^2 + 4(4 - a)$

. Выберем $a = 4$, тогда $D = y^2$ и $x = \frac{3y-4\pm y}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y - 2, \\ x = y - 2. \end{array}\right.$

Уравнение принимает стандартный вид:
$x^2 + 4x - 3xy - 6y + 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3xy - 6y + 2y^2 + 4 = 4 \Leftrightarrow$

$$(x - 2y + 2)(x - y + 2) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2y + 2 = 1, \\ x - y + 2 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y + 2 = 3, \\ x - y + 2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y + 2 = -1, \\ x - y + 2 = -3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y + 2 = -3, \\ x - y + 2 = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая совокупность, получаем, 1+4+9+4+9+4+49+4=84

Ответ: 84.

2. **Верно ли, что при любых *a, b, c, d* и *e* справедливо неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$?**

Решение: Перебор некоторых значений *a*,*b*,*c* , *d* и *e* показывает, что как будто *данное неравенство справедливо при любых значениях этих переменных*. Попробуем неравенство доказать.

Раскроем скобки в правой части неравенства, перенесём все члены в левую часть и умножим новое неравенство на 4, имеем: $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 - 4ab - 4ac - 4ad - 4ae \geq 0$, группируя члены в левой части прийти к следующему виду: $(a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2$.

Последнее выражение неотрицательно при всех действительных значениях *a, b, c, d* и *e* . Следовательно, исходное неравенство доказано.

3. Из пункта *А* кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль дважды проехал по всему шоссе. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил свою скорость на 16 км/ч и через 22,5 мин после разворота одновременно с автомобилем прибыл в *А*. Определите весь путь, проделанный мотоциклом, если этот путь на 5,25 км короче всего шоссе.

Решение: Обозначим скорости автомобиля и мотоцикла соответственно через v_1 км/ч и v_2км/ч, а длину шоссе – чрез S км. Тогда весь путь, проделанный мотоциклистом, равен $(S-5{,}25)$ км, а значит, его путь в одну сторону – $\frac{1}{2}(S-5{,}25)$ км. За то время, за которое мотоцикл проедет путь $\frac{1}{2}(S-5{,}25)$ км.

За то время, за которое мотоциклист проедет путь $\frac{1}{2}(S-5{,}25)$ км в первый раз, автомобиль проедет на S км больше, а, следовательно, он проделает путь

$\frac{1}{2}(S-5{,}25)+S=\frac{1}{2}(3S-5{,}25)\,км$. Тогда первое уравнение таково: $\frac{3S-5{,}25}{2v_1}=\frac{S-5{,}25}{2v_2}$. После поворота мотоцикл проедет тот же путь $\frac{1}{2}(S-5{,}25)$ км, но со скоростью (v_2+16)км/ч. Так как он тратит на это 22,5 мин $=\frac{3}{8}$ ч, что $\frac{1}{2}(S-5{,}25)=(v_2+16)\cdot\frac{3}{8}$. За то же время автомобиль проделает путь $S-\frac{1}{2}(S-5{,}25)=\frac{1}{2}(S+5{,}25)$, поэтому $\frac{1}{2}(S+5{,}25)=v_1\cdot\frac{3}{8}$. Далее получаем систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3S-5{,}25}{2v_1}=\frac{S-5{,}25}{2v_2}, \\ \frac{1}{2}(S-5{,}25)=(v_2+16)\cdot\frac{3}{8}, \\ \frac{1}{2}(S+5{,}25)=v_1\cdot\frac{3}{8}. \end{cases}$$

Решая которую, получаем: $S=26{,}25$ км, Тогда весь путь мотоциклиста равен 26,25-5,25 =21 (км).

4. Найдите четырёхзначное натуральное число, являющееся точным квадратом, у которого цифра тысяч одинакова с цифрой сотен, а цифра десятков равна цифре единиц.

Решение: Запишем искомое число в виде $n^2 = \overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y)$. В силу того, что последнее выражение является точным квадратом, получаем, что $100x + y$ делится на 11. Воспользовавшись тем, что $100x + y = 99x + x + y$, получим, что на 11 должна делиться сумма $x + y$. Но так как x, y – цифры, то $x + y = 11$. Теперь заменим y на $11 - x$ и получим $n^2 = 11^2(9x + 1)$. Из этого равенства следует, что $9x + 1$ должно быть точным квадратом, т.е. $9x + 1 = m^2$, причём m – цифра, так как $9x + 1$ является двузначным числом (x не может быть равен нулю). Таким образом, $9x = (m - 1)(m + 1)$. Далее выполнить соответствующие рассуждения, которые приведут к тому, что $m = 8$.

Ответ: 7744.

5. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 30^0, а катет, лежащий против этого угла, равен *a*. Через вершину прямого угла проведена окружность, касающаяся гипотенузы и отсекающая от катетов хорды равной длины. Найти её радиус.

Решение: Пусть ABC – заданный треугольник, *AC*⊥ *BC, BC=a, O* – центр окружности, а *E* и *D* – точки пресечения окружности с катетами *AC* и *BC* соответственно. По условию задачи *EC=CD.*

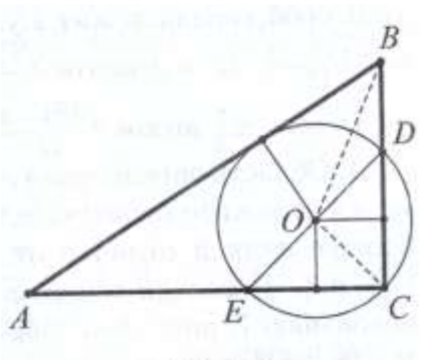


Рис. 82

Вписанный в окружность прямой угол *DCE* опирается на диаметр, поэтому точки *O, E* и *D* лежат на одной прямой, а *ECD* – равнобедренный прямоугольный треугольник с острым углом 45^0. Если через *r* обозначить радиус окружности, то расстояния от точки *O* до сторон *AC* и *BC* будут равны $r\sin 45^0 = \frac{r}{\sqrt{2}}$, а расстояние от точки *O* до *AB* равно *r* . Выразим теперь через *r* площадь исходного треугольника:

$s_{ABC} = \frac{1}{2}\left(AB \cdot r + AC \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} + DC \cdot \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ar}{sin30^0} + \frac{ar \cdot ctg30^0}{\sqrt{2}} + \frac{ar}{\sqrt{2}}\right) = \frac{ar}{2\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1\right)$

.

С другой стороны, $s_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}a^2 ctg30^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Приравняв найденные значения площади, определим искомый радиус.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$.

6. **Существует ли такое целое a, при котором многочлен $f(x) = x^{13} + x + 90$ делится на трёхчлен $x^2 - x + a$?**

Решение: так как многочлен $f(x)$ делится на $x^2 - x + a$ (в смысле делимости целых чисел): $x^{13} + x + 90 \vdots x^2 - x + a$. Положим $x = 1$, а затем $x = 0$: $92 \vdots a$, $90 \vdots a$.
Из делимостей чисел 92 и 90 на a следует, что $2 \vdots a$. Отсюда $a = \pm 1, \pm 2$.
Дальше перебрать 4 случая, в зависимости от a. Довести решение самостоятельно до конца.
Ответ: существует и единственно $a = 2$.

10 класс

1. **Найдите наименьшее значение выражения: $\boldsymbol{y = \left|11^k - 5^n\right|}$ $\boldsymbol{(n \in N, k \in N)}$.**

Решение: так как число 11^k оканчивается цифрой 1, а число 5^n цифрой 5, то число y оканчивается цифрой 6 или 4; второе происходит тогда когда $\left|11^k - 5^n\right| = 5^n - 11^k$. Может ли y принимать значение, равное 4? Если да, то оно является наименьшим значением y. Последний вопрос сводится к следующему: имеет ли уравнение $5^n - 11^k = 4$ решение в натуральных числах? Оказывается, имеет – например, $n = 3, k = 2$.

Ответ: 4, $k = 2, n = 3$.

2. **Решите уравнение: $\boldsymbol{x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{2000}\right]}$.**

Решение: Из условия следует, что число x – целое. Воспользуемся неравенством:

$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] \le \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = x < \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] + 3$, так как $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = x.$ $-\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right] - 3 < -x < -\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right]$. Прибавим ко всем частям неравенства x, т.е. Сумму , стоящую в правой части исходного уравнения: $\left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{7}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{2000}\right] - 3 < 0 \le \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{7}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{2000}\right]$. Тогда $0 \le \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{7}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{2000}\right] < 3$. Следовательно, $x \ge 0$. Кроме того, все слагаемые суммы из последнего неравенства, начиная с третьего слагаемого, равного $\left[\frac{x}{7}\right]$, равны нулю. Отсюда $x < 7$. Осталось перебрать случаи: $x = 0,1,2,3,4,5,6$. Подходят только 0, 4 и 5.

Ответ: 0, 4 и 5.

3.Задан равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Окружность радиуса $2\sqrt{5}$ касается прямой *AC* в точке *A*, боковой стороны *BC* в некоторой точке *D* и пересекает боковую сторону *AB* в точке *M*. Найдите периметр треугольника *ABC*, если *AM*: *MB*=5:4.

Решение: Пусть O – центр заданной окружности. Тогда радиусы OA и OD перпендикулярны соответственно прямым AC и BC, CO – биссектриса

угла ACD (рис.139).

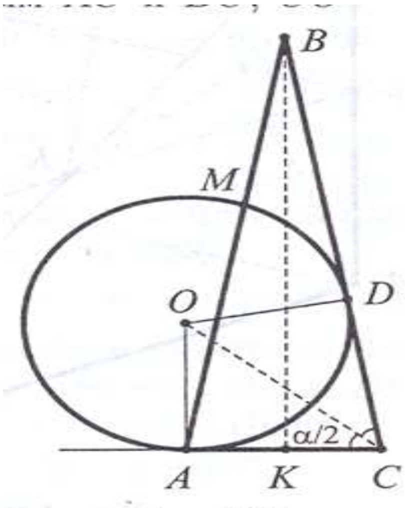


Рис. 139

Положим AM=5x, тогда BM = 4x. По теореме о секущей и касательной $BD^2 = AB \cdot BM = 36x^2$, откуда $BD = 6x$. Так как треугольник равнобедренный, то $BC = AB = FM + MB = 9x, DC = BC - BD = 3x$. Отрезки касательных, проведённых из одной точки, равны, поэтому $DC = AC = 3x$. Пусть $\angle BCA = \alpha$, BK- высота, опущенная из вершины B на основание AC. Тогда $\cos\alpha = \frac{CK}{BC} = \frac{AC}{2BC} = \frac{3x}{2\cdot 9x} = \frac{1}{6}$, $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{5}{7}$. В прямоугольном треугольнике AOC: $AO = 2\sqrt{5}, AC = 3x, AO = AC \cdot tg\angle ACO = AC \cdot tg\frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$3x \cdot \sqrt{\frac{5}{7}} = 2\sqrt{5}, x = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$. Периметр треугольника равен $14\sqrt{7}$.

Ответ: $14\sqrt{7}$.

3. На собрании присутствовало *k* рыцарей и хитрецов, причём рыцарей было больше, чем хитрецов. Путешественник хочет выяснить про каждого кто он. Для этого он может задать вопрос: «Кем является такой-то: рыцарем или хитрецом?» (В частности, может спросить, кем является сам отвечающий.) Сколько вопросов следует задать путешественнику, чтобы выяснить про каждого кто он?

Решение: Поставим всех присутствующих на собрании в одну шеренгу, занумеруем их и спросим каждого о его правом соседе (начиная с первого).

Пусть *n*- минимальное число, при котором *n*-й сказал о своём соседе, что он хитрец. Тогда пару *(n, n+1)* выедем из цепочки и спросим *(n-1)* – го о его соседе и т.д. Следовательно, в каждой из пар не меньше одного хитреца, поэтому в цепочке рыцарей больше, чем хитрецов, в частности, последний в цепочке всегда рыцарь, если в цепочке больше одного человека, то двое последних – рыцари, и достаточно задать последнему *k-2* вопроса об остальных. Всего вопросов будет *k–1+ k+2=2 k–3.* Просмотреть может ли цепочка состоять из одного человека самостоятельно, при положительном ответ дать ответ.

Ответ: 2*k*–3 либо $\frac{3k}{2}-1$**.**

4. **По дорожке, имеющей форму окружности, из двух диаметрально противоположных точек *A* и *B* выбегают одновременно два спортсмена и бегут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Первая их встреча произошла через *t* секунд в а метрах от *B*, а вторая встреча — в *2a* метрах от А (*a*>*0*, под расстоянием понимается длина кратчайшего пути по дорожке). Найдите скорости спортсменов.**

Решение: Пусть *u* и *v* – скорости спортсменов, выбежавших соответственно из *A* и *B*, а *2l*- длина всей дорожки. В момент первой встречи спортсмен *B* преодолел расстояние $l-a$, следовательно, $u=\frac{l-a}{t}$, $v=\frac{a}{t}$. Вторая встреча могла произойти в одной из следующих трёх ситуаций.

1. Спортсмен *A* уже достиг пункта *B* или миновал его, а спортсмен *B* достиг пункта *A* или миновал его. При этом до момента второй встречи спортсмен *A* преодолел расстояние $2(l-a)$, а спортсмен *B* – расстояние $l+2a$. На преодоление указанных расстояний спортсмены затратили одно и то же время, поэтому

$\frac{2(l-a)}{u}=\frac{l+2a}{v}$. Отсюда вытекает, что $2a=l+2a,\ l=0.$ Полученное значение l противоречит смыслу задачи.

2. Спортсмен *B* ещё не достиг пункта *A*. В этом случае он преодолел расстояние $l-2a$, а спортсмен *A* – расстояние $2(l+a)$. Таким образом, $\frac{l-2a}{v}=\frac{2(l+a)}{u}$. Отсюда получаем $l=5a, u=\frac{4a}{t}$.

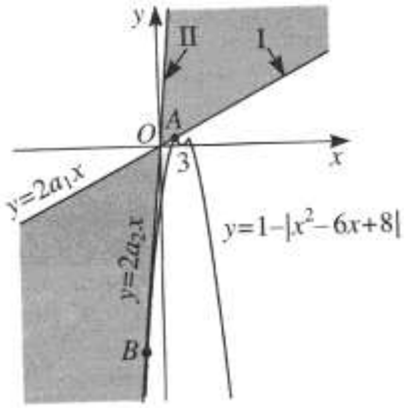
3. Спортсмен *A* ещё не достиг пункта *B*. Действуя, как и выше, придём к уравнению $\frac{2a}{u}=\frac{3l-2a}{v}$. Откуда вытекает, что $l=\frac{5a}{3}$. Этого, не может быть, так как по смыслу задачи $l\geq 2a$.

Ответ: $\frac{4a}{t}$, $\frac{a}{t}$ (м/с).

5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ меньше 1.

Решение: При каждом фиксированном значении параметра а функция $y_a(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ определена на всей числовой прямой и непрерывна на всей области определения. Функция задаётся формулой $y_a(x)=x^2-(6+2a)x-8.$ при $\begin{cases} x\leq 2, \\ x\geq 4. \end{cases}$, а при $2\leq x\leq 4, y_a(x)=-x^2+(6+2a)x-8.$ На каждом из промежутков $(-\infty;2]$, $[2;4]$ и $[4;+\infty)$ функция ограничена снизу. Следовательно, условию задачи будут удовлетворять все такие значения параметра *a*, при которых неравенство $y_a(x)<1$ или $2ax+|x^2-6x+8|<1 \Leftrightarrow 2ax<1-|x^2-6x+8|$ имеет хотя бы одно решение, т.е. график функции $g(x)=1-|x^2-6x+8|$ расположен выше графика функции $y=2ax$ хотя бы при одном значении *x*.

Построим на плоскости *Oxy* график функции $g(x)$. Равенство $y=2ax$ задаёт на плоскости *Oxy* семейство прямых с угловым коэффициентом $2a$, проходящих через начало координат. Имеется два критических положения этих прямых.



(I) График функции $y = 2a_1x$ проходит через точку $A(2;1)$, как показано на рисунке. Из уравнения $2a_1x = 1$ при $x = 2$ получаем угловой коэффициент первой прямой: $k_1 = 2a_1 = 0{,}5$.

(II) График функции $y = 2a_2x$ касается графика функции $g(x) = -x^2 + 6x - 7$ на промежутке $(-\infty; 2]$, т.е. проходит через точку B как указано на рисунке. Из условия касания найдём угловой коэффициент второй прямой:

$$\begin{cases} g'(x_0) = y'(x_0) \\ g(x_0) = y(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0 + 6 = 2a_2 \\ -x_0^2 + 6x_0 - 7 = 2a_2x_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\sqrt{7}, \\ 2a_2 = 6 + 2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Отсюда имеем угловой коэффициент второй прямой $k_2 = 2a_2 = 6 + 2\sqrt{7}$.

Рассматриваемое неравенство не будет иметь решение при $k_1 \le k \le k_2, 0{,}5 \le 2a \le 2\sqrt{7} + 6,\ 0{,}25 \le a \le \sqrt{7} + 3,$ когда прямые расположены в выделенной области.

Соответственно, решение будет существовать при $a \epsilon (-\infty; 0{,}25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

Ответ: $a \epsilon (-\infty; 0{,}25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

11 класс

1. Автобус считается переполненным, если в нём едет более 50 пассажиров. Два инспектора ГИБДД остановили колону автобусов. Инспектор Подберёзовиков подсчитал процент переполненных автобусов, а Подосиновиков – процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах. У кого процент больше?

Решение: Пусть в колонне оказалось k переполненных и l непереполненных автобусов. Обозначим количество пассажиров, едущих в переполненных автобусах, через A, а количество остальных – через B.

Тогда $A > 50k$, $B \le 50l$, и, значит, $\frac{A}{k} > 50$, $\frac{B}{l} \le 50$, поэтому $\frac{A}{k} > \frac{B}{l}$. Из этого неравенства вытекают следующие: $\frac{B}{A} < \frac{l}{k}$, $\frac{(A+B)}{A} < \frac{(l+k)}{k}$, откуда $100\% \cdot \frac{A}{(A+B)} > 100\% \cdot \frac{k}{(k+l)}$.

В последнем неравенстве слева стоит процент людей, едущих в переполненных автобусах, а справа – процент переполненных автобусов.

Ответ: у Подосиновикова.

2. Докажите, что если α, β, γ – углы треугольника, то $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{8}$. Докажите также что равенство достигается только в случае равностороннего треугольника.

Доказательство:

Преобразуем выражение

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}(\cos^2(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)) = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right)^2 + \frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta) \le 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

. Равенство достигается при условиях: $\cos(\alpha-\beta) = 1, \cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) = 0$. В этом случае $\alpha-\beta = 0, \alpha+\beta = 120^0$, откуда $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$.

3. Положительные числа *a, b, c* таковы, что $\boldsymbol{abc = 1}$. Докажите неравенство

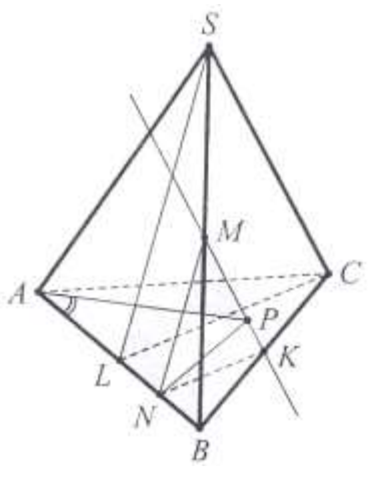
$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^3(b+c)}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b^3(a+c)}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c^3(b+a)}} \geq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.$$

Решение: Удобно перейти к новым переменным $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, также положительным и связанным условием $xyz = 1$. Данное неравенство эквивалентно следующему: $S = \frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(z+x)} + \frac{z^2}{(x+y)} \geq \frac{3}{2}$. Применяя неравенство Коши-Буняковского к векторам

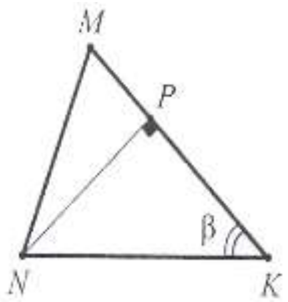
$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{x+z}}, \frac{z}{\sqrt{y+x}}\right)$ и $\left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}\right)$, получаем $(x+y+z)^2 \leq 2S(x+y+z), \text{т.е.} S \geq \frac{x+y+z}{2}$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел, получаем: $S \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$.

4. **В основании правильной треугольной пирамиды *SABC* лежит треугольник *ABC,* стороны которого равны $\mathbf{2\sqrt{3}}$, боковые рёбра пирамиды равны 4. Точки *AB* и *K* – середины рёбер *SB* и *BC* соответственно. На прямой *MK* выбирается произвольным образом точка *P.* Найдите наименьшую возможную величину угла *PAB.***

Решение: Опустим перпендикуляр *MN* из точки *M* на ребро *AB* и пусть *L* – середина *AB*. Тогда *SL* – высота равнобедренного треугольника *ASB, MN* || *SL.* Так как *M* – середина *SB* , то $NB = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{4}AB$, поэтому $AN = \frac{3}{4}AB\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$.



Заметим, что KN – средняя линия в треугольнике CLB, а CL- его высота, отсюда $KN \perp AB$. Таким образом, каждая из прямых MN и NK, лежащих в плоскости NKM, перпендикулярна прямой AB. Значит, $AB\perp$ указанной плоскости.Отсюда вытекает, что для любой точки P , выбранной на прямой MK, треугольник ANP – прямоугольный, а для искомого угла PAB (обозначим его через α) имеем: $tg\alpha = \frac{PN}{AN}$. Минимальным угол будет в том члучае, когда значение $tg\alpha$ наименьшее. Знаменатель AN дроби $\frac{PN}{AN}$ постоянен, поэтому $tg\alpha$ будет наименьшим, когда $NP \perp MK$, NP – высота треугольника MNK. Найдём стороны данного треугольника



$\mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{SL} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AL}^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, МК$= 2, NK = \frac{1}{2}CL = \frac{3}{2}$. Пусть $\angle NKM = \beta$. По теореме косинусов $NM^2 = NK^2 + MK^2 - 2NK \cdot MK\, cos\beta$. Отсюда $cos\beta = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $NH = NKsin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Следовательно, минимальное значение $tg\alpha = \frac{NP}{AN} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = arctg\frac{1}{2}$.

Ответ: $arctg\frac{1}{2}$.

5. Найдите целую часть числа:

$$a_k = \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \cdots + \sqrt{n^2 - n}}}}$$

(k - число радикалов, $n \epsilon N$).

Решение: Так как $a_1 = \sqrt{n^2 - n} < n$, то при любом $k > 1$ получаем:

$$a_k = \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \cdots + \sqrt{n^2 - n}}}} <$$
$$\sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \cdots + \sqrt{n^2 - n + n}}}$$

,

где число радикалов уже $k-1$. Продолжая этот процесс, будем иметь, что $a_k < n$

при любом k. (Фактически доказательство последнего неравенства проводится методом математической индукции: если при некотором k $a_k < n$, то $a_{k+1} = \sqrt{n^2 - n + a_k} < \sqrt{n^2 - n + n} = n$). Верно ли, что при любом натуральном k $a_k \geq n - 1$? Начнём с a_1: $a_1 = \sqrt{n^2 - n} > n - 1$, $n^2 - n \geq n^2 - 2n + 1, n \geq 1$, а это неравенство справедливо. Допусти, что при некотором k $a_k \geq n - 1$. Тогда получаем: $a_{k+1} = \sqrt{n^2 - n + a_k} > \sqrt{n^2 - n + n - 1} = \sqrt{n^2 - 1}$, а последний радикал не меньше $n - 1$. В самом деле,

$\sqrt{n^2 - 1} \geq n - 1$, $n^2 - 1 \geq n^2 - 2n + 1$, $2n \geq 2, n \geq 1$.Итак, если $a_k \geq n - 1$, то $a_{k+1} \geq n - 1$. По принципу математической индукции при любом k $a_k \geq n - 1$. Оказалось, что $n - 1 \leq a_k < n$. Следовательно, $[a_k] = n - 1$.

Ответ: $n - 1$.

6. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x - |\sin x \cos x| = a$ имеет хотя бы один корень.**

Решение: Уравнение равносильно следующим: $\sin^2 x - |\sin x \cos x| = a(\sin^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow a\cos^2 x + |\sin x \cos x| + (a-1)\sin^2 x = 0$.

Если $a = 0$ или $a = 1$, то последнее уравнение имеет корни (например, $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ соответственно). Рассмотрим значения $a \neq 0, a \neq 1$. В этом случае среди значений x, для которых $\sin x = 0$, корней уравнения нет, поскольку, если $\sin x = 0$, то из уравнения следует, что и $\cos x = 0$, а одновременно эти два равенства выполняться не могут. Следовательно, деление обеих частей уравнения на $\sin^2 x$ не приведёт к потере корней. Разделив, получаем, уравнение, равносильное исходному: $a\,ctg^2 x + |ctg x| + (a-1) = 0$. Полученное уравнение заменой $|ctg x| = t$ сводится к системе: $\begin{cases} t \geq 0, \\ at^2 + t + (a-1) = 0 \end{cases}$.

Для того чтобы корни квадратного уравнения: $at^2 + t + (a-1) = 0$ существовали, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $D = 1 + 4a - 4a^2$ этого уравнения был неотрицателен, что имеет место, если $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. В этом случае согласно теореме Виета для корней t_1, t_2 имеем: $t_1 \cdot t_2 = \frac{a-1}{a}$ и $t_1 + t_2 = -\frac{1}{a}$. Рассмотрим два случае.

1) $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$. Тогда $t_1 \cdot t_2 > 0$ и $t_1 + t_2 > 0$, следовательно, оба корня положительны и смешанная система имеет решение.
2) $0 < a < \frac{1+\sqrt{2}}{2}, a \neq 1$. Тогда $t_1 + t_2 < 0$, следовательно, хотя бы один корней отрицателен и, значит, второй будет положителен лишь при условии $t_1 \cdot t_2 < 0$, следовательно, хотя бы один из корней отрицателен и, значит, второй будет положителен лишь при условии $t_1 \cdot t_2 < 0$, откуда получим $0 < a < 1$. Таким образом, исходное уравнение имеет решение, если $a = 0,\ a = 1, \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq a < 0$ и $0 < a < 1$.

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.