ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗАВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»

АВИАЦИОННО-ТРАНСПОРТНЫЙ КОЛЛЕДЖ

Н. А. Юновидова

**М А Т Е М А Т И К А**

Конспект лекций для специальности 161007

«Управление движением воздушного транспорта»

Санкт-Петербург

2015

**Р А З Д Е Л 1**

**ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

**Тема 1.1. Функция и её непрерывность, предел функции**

**Цели урока:**

1. Образовательная – обеспечить формирование первоначальных представлений о таком фундаментальном понятии математического анализа как предел функции.
2. Воспитательная – воспитание добросовестного отношения к учёбе, воспитание дисциплинированности.
3. Развивающая – формирование умения выделять главное, составлять тезисы, вести конспект.

**План занятия:**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: знакомство со студентами, проверка присутствующих, краткий обзор изучаемого курса и общие требования, предъявляемые к учащимся, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Функция.
2. Пределы.
3. Непрерывность функции.
4. Неопределённости и способы их раскрытия.

Изложение нового материала.

*Функция*

Переменная называется**функцией** от аргумента (что записывается: y =()), если каждому значению из множества Х ( Х) ставится в соответствие одно вполне определённое значение переменной .

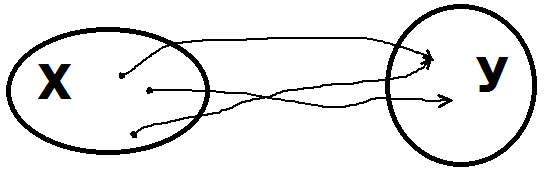
 При этом множество Х называется **областью определения** функции = () (ООФ), а соответствующее ему множество У называется **областью значений** функции .

рис.1.

Функцию =() можно задавать различными способами. Ограничимся рассмотрением лишь двух:

а) *Аналитический*, т.е. с помощью формулы *f* (), которая указывает, какие действия совершаются над переменной : = *f* (). Область определения функции при этом составляют те значения аргумента , при которых формула *f* () имеет смысл.

Пример 1.

Для функции = , ООФ: 0, ОЗФ 0.

б) *Графический,* когда функции = *f* () сопоставляется линия на плоскости, называемая *графиком функции,* обладающая тем свойством, что координаты (; ) точек этой линии и только они обращают уравнение =  *f* () в верное равенство.

Y

Пример 2.

= 3 +

= 3 +

3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 | 3  X |
|  | -3 | 0  - 3 |

рис. 2.

*Простейшими* называются следующие функции:

1. *степенная* функция = , где

2. *показательная* функция = , где 0, 1;

3. *логарифмическая* функция = , где 0, 1;

4. тригонометрические функции , , , ;

5. *обратные тригонометрические*  , , , .

Всякая функция, которая получается из простейших функций путём выполнения конечного числа арифметических операций и операции составления из них сложной функции, называется *элементарной* функцией.

*Пределы*

Если каждому натуральному числу  по некоторому закону поставлено в соответствие определённое число , то говорят, что задана **числовая последовательность** .

Число называется **пределом числовой последовательности** , если для *любого* числа 0 сколь угодно малого найдется такой номер зависящий от , что для всех членов последовательности с номерами верно неравенство

*.*

Этот факт записывается следующим образом

.

Число называется **пределом функции** = *f* () при , если для *любого*  сколь угодно малого 0 найдётся такое P, что для всех , удовлетворяющих условиям | выполняется неравенство

| *f* () –

что записывается

.

Пусть функция = *f* () определена в некоторой окрестности точки , быть может, за исключением самой этой точки.

Число называется **пределом функции** = *f* () при (или в точке ), если для *любого*  сколь угодно малого 0 найдётся такое , что для всех , удовлетворяющих условиям | – | , , выполняется неравенство

| *f* () – А | .

Обозначается предел

*f* () или .

Если функция имеет предел, то он **единственен**, поэтому значение его не зависит от способа приближения к точке

предел *справа*

= ,

предел *слева*

= .

Предел слева обозначают = ,

а предел справа обозначают = .

Функция () называется **бесконечно малой величиной** при  (или при, если предел этой функции равен нулю:

.

Бесконечно большой величиной называется функция, которая по абсолютной величине больше любого наперёд заданного числа, точнее, функция () называется ***бесконечно большой величиной при*** х , если для любого К0 сколь угодно большого найдётся такое что для всех х, удовлетворяющих условиям –| выполняется неравенство |()| К. Обозначается:

() , или = .

Функция = является бесконечно малой при , а функция - бесконечно большой при 0.

*Величина обратная бесконечно малой величине является бесконечно большой величиной и наоборот*, то есть:

Если при функция () – бесконечно малая величина, а () – бесконечно большая величина, то - бесконечно большая величина, - бесконечно малая величина. Условно этот факт можно записать

= , = 0.

Следует отметить, что функция имеет конечный предел = А тогда и только тогда, когда её можно представить в виде *f* () = А +(), где () – бесконечно малая величина при .

*Свойства пределов*

1. *lim c* = c, где c – const;
2. *lim ( u v ) = lim u lim v;*
3. *lim (uv ) = lim u lim v, в частности lim (c u) = c lim u;*
4. *lim = ( lim v 0).*

Замечание: перечисленные свойства верны для функций имеющих предел, при этом свойства 2 и 3 распространяются на любое конечное число функций.

*Непрерывность функции*

Если сначала рассматривают значение функции = *f*() при аргументе = , а затем при = , то говорят, что аргумент получил **приращение** = - (= + ), а функция получила **приращение** = *f* ( - *f* ( (*f* (= *f* (+ ).

Функция = *f*(), определённая в окрестности точки = , т.е. при | – | называется **непрерывной** в точке = , если предел слева равен пределу справа и равен значению функции в этой точке:

( = = *f* (

то есть = *f* (.

На языке приращений свойство непрерывности означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

= 0.

Следует отметить, что любая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Если равенство ( нарушается, то функция терпит **разрыв**, при этом:

а) если пределы существуют, а нарушены лишь равенства или функция не определена в точке

= , то говорят, что функция терпит разрыв первого рода. Разрыв первого рода называется устранимым, если = , а функция в точке х = не определена.

Y

X

X

Рис. 3. Рис. 4.

б) если хотя бы один из пределов не существует или равен то имеем дело с разрывом второго рода.

Пример 4. Функция = в точке = 0 терпит разрыв второго рода (рис. 4).

Непрерывные функции обладают многими хорошими свойствами. Функция непрерывная на замкнутом промежутке (отрезке) ограничена и достигают на нём своё наибольшее и наименьшее значения, то есть если = непрерывна на отрезке [a; b], то m *f* ( ) M, где , M = . Кроме того для любого N [m; M] найдётся хотя бы одно значение аргумента [a; b], такое что *f* ( )*=* N.

Для непрерывных функций верно равенство  *lim f(()) = f (lim ())*.

Так как элементарная функция непрерывна в своей области определения, то исследуют поведение функции лишь в тех точках, которые выпадают из области определения, но являются её граничными точками.

Пример 5.

Для функции у = находим область определения: так как ( – 3)( + 7) 0 и + 7 0, то получаем (-. Исследовать функцию нужно в точках = -, = -7, = 3, = +.

*Неопределённости и правила их раскрытия*

**Неопределённости** – это ситуации, возникающие при вычислении пределов, когда результат зависит от скорости стремления рассматриваемых функций к своим пределам (например, ясно, что функция при стремится к нулю медленнее чем функция ).

Неопределённости бывают разных видов. Вот их условные обозначения :

, , { }, { }, { }, { }, { }.

Приведём некоторые часто встречаемые неопределённости, которые представляют

собой так называемые *замечательные пределы:*

I. = 1

II. = e { }

III. = = , ( = 1 )

IV. = , ( = 1 )

Приёмы раскрытия неопределённостей

а) Неопределённости вида раскрываются, как правило, делением числителя и знаменателя на множитель, стремящийся к нулю, или с помощью замечательных пределов.

Пример 6.

= = = = ;

б) Неопределённости вида , когда под знаком предела стоит отношение степенных или показательных функций, раскрываются сведением к бесконечно малым величинам. Для этого в случае степенных функций делят числитель и знаменатель на х в старшей степени, а при показательных функциях - на показательную функцию с большим основанием.

Пример 7.

= = -

так как являются бесконечно малыми величинами при ;

в) Неопределённости вида { } и { } раскрываются путём преобразования к неопределённости или .

Пример 8.

1. = = =;
2. ( = = = 1.

г) Неопределённости вида { } раскрываются посредством преобразования ко второму замечательному пределу.

Пример 9.

= =

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

Как определить ООФ, если она задана аналитически?

Какие функции называются элементарными?

Перечислить простейшие функции.

Как связаны между собой и из определения предела функции? Можно ли эту связь назвать функциональной (сказать, что есть функция от )?

Сколько пределов может иметь функция?

Что означает символическая запись или ?

Перечислить свойства пределов.

Всегда ли сумма (произведение) функций имеющих предел равна сумме (произведению) пределов?

Может ли одна и та же функция быть бесконечно большой и бесконечно малой величиной?

Может ли убывающая функция быть бесконечно большой величиной?

Начертить графики изучаемых в школе функций (, y=, , , , , , , ).

Что можно сказать о непрерывности элементарных функций?

Дать определение непрерывности функции на языке приращений.

Дать определение непрерывности функции.

Какое определение непрерывности функции позволяет классифицировать точки разрыва?

Ввести понятие одностороннего предела.

В каком случае функция в точке терпит разрыв первого рода?

В каком случае разрыв называется устранимым?

В каком случае функция в точке терпит разрыв второго рода?

Исследовать на непрерывность найти точки разрыва и указать характер разрыва:

а) ; б);

**Тема 1.2. Производная и дифференциал функции**

**Цели урока**:

Образовательная – ввести понятие производной и дифференциала, рассказать об их использовании в других науках.

Воспитательная – воспитание добросовестного отношения к учёбе, воспитание дисциплинированности.

Развивающая – формирование умения выделять главное, составлять тезисы, вести конспект.

**План занятия**:

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: проверка присутствующих, краткий обзор изучаемого курса и общие требования, предъявляемые к учащимся, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Задача механики, приводящая к понятию производной.
2. Производная и её геометрический смысл.
3. Правила дифференцирования.
4. Таблица производных.
5. Механический смысл производных первого и второго порядков.
6. Дифференциал функции и его применение при вычислении приближенного значения функции.
7. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя.

Изложение нового материала.

*Задача, приводящая к понятию производной*

Пусть при прямолинейном движении материальной точки путь есть функция времени: *S = S* (*t)*. Рассмотрим путь *S ( ) = S (t) – S ()*, пройденный за промежуток времени = - . Средняя скорость на временном промежутке от до ( [] ) равна:y = .

Чем меньше длина временного промежутка, тем лучше средняя скорость описывает движение. Мгновенная скорость движения в момент времени *t* = равна:

V ( ) = **.**

*Производная и её геометрический смысл*

Рассмотрим функцию = . Графиком её на плоскости прямоугольных координат , является некоторая линия:

Рассмотрим функцию = , заданную на некотором промежутке.

Если существует предел

() = = , (

то он называется **производной** функции в точке и обозначается или . Операция нахождения производной от функции называется **дифференцированием** функции.

X

Y

Рис. 5.

. = ().

Так как тангенс угла наклона секущей при 0 стремится к тангенсу угла наклона касательной к графику функции = в точке, соответствующей  *= ,* то *геометрический смысл производной*, вычисленной в точке, численно равен угловому коэффициенту касательной. Поэтому уравнение касательной имеет вид

*-* () ( ). (

Функция называется дифференцируемой в точке, если она имеет (конечную) производную в этой точке. Чтобы продифференцировать функцию, нужно знать правила дифференцирования и таблицу производных простейших функций.

*Правила дифференцирования*

= 0, c – cost;

= , = ;

= + , = c ;

=

= .

*Таблица производных*

1. = , = 1, = ;
2. = , = ;
3. = , = ,
4. = , = - , = , = - ;
5. = , = - , = , = - .

Если функция *у* = *у* (х) дифференцируема в точке, то она в ней и непрерывна. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример.

X

Рис. 6.

Функция, график которой изображён на рис. 6, непрерывна на промежутке (а; b) , но не дифференцируема в точках = , = , так как предел () в точке  *=* бесконечный, а в точке = он вообще не существует (наличие односторонних касательных с различными угловыми коэффициентами свидетельствует о том, что предела в точке = нет).

Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка (а; b), то она называется **дифференцируемой на этом промежутке.** Её производную можно рассматривать на промежутке (а; b) как функцию от х и опять дифференцировать, получая при этом **производные высших порядков**:

= , = , … , = …

*Механический смысл производной*

Если х = х( t ) –закон движения материальной точки вдоль прямой, то = () -  *скорость* движения, а () - *ускорение* в момент времени .

*Дифференциал функции и его применение при вычислении приближенного значения функции*

Пусть функция дифференцируема в точке *x* = , то есть существует конечный предел

= ,

тогда по свойству пределов можно записать, что

= + ,

где - бесконечно малая величина при . Умножая обе части равенства на , получаем = +

Главная часть приращения функции , линейная относительно , называется **дифференциалом функции** и обозначается . Следует отметить, что второе слагаемое стремится к нулю быстрее за счёт бесконечно малой величины , поэтому вносит меньший вклад в приращение функции по сравнению с дифференциалом . При достаточно малых имеем .

Это свойство используется в приближённых вычислениях:

(*x* - ) ( )

Пример. Найти приближённое значение корня .

Решение.

= = ; = ;

= 0,98; = 1; = = 0,98 – 1 = – 0,02;

= = = 1; = = .

1 + (– 0,02) = 1 – 0, 004 = 0,996.

И так, получили, что

0,996.

*Геометрический смысл дифференциала* функции.

Дифференциал функции = в точке равен приращению ординаты касательной, проведённой к графику этой функции в точке (, соответствующему приращение её абсциссы на *.*

Сравнивая формулы () и (), приходим к выводу, что при приближённом вычислении с помощью формулы (), мы заменяем значение функции в точке  *= +*  на значение ординаты точки касательной, имеющей абсциссу  *= + .*

Y

X

Рис.7.

( Вместо точки на графике функции берём точку на касательной).

*Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя*

Если при х а функции u(x) и v(x) одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, то предел их отношения равен пределу отношения их производных (если последний существует), то есть:

= .

Замечание. Если отношение производных будет также представлять случай , то можно снова применить правило Лопиталя (это имеет смысл, если выражение под знаком предела упрощается).

Неопределённости других видов сводят к с помощью тождественных преобразований. Так для {}, { }, { } используют основное логарифмическое тождество: а = (а 0 ).

Пример.

= = = 0;

= = = n =

(степенная функция при х растёт быстрее логарифмической функции)

= = = = , (n = n(n-1)(n-2)21)

Итак, << << при x, (a > 1);

= = = = =

= = = ;

При раскрытии неопределённостей лучше всего сочетать применение прежних методов с правилом Лопиталя.

= = = = =

= = = = 1;

( x представлять в виде не стоит, т.к. после применения правила Лопиталя выражение усложнится)

Следует отметить, что один и тот же предел иногда можно вычислять разными способами:

а) = = =

б) = = = = = ;

в) при вычислении этого предела можно также использовать первый и третий замечательные пределы:

=

== = = = **.**

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Дать определение первой производной.

2. Какая функция называется дифференцируемой?

3. В чём состоит геометрический смысл первой производной?

4. Какая существует связь между дифференцируемостью и непрерывностью?

5. Перечислите правила дифференцирования.

6. Дать определение производной второго порядка.

7. Механический смысл первой и второй производной.

8. Записать первую и вторую формы дифференциала.

9. Записать уравнение касательной.

10. На какие слагаемые разлагается приращение дифференцируемой функции?

11. Как используется дифференциал для приближённого вычисления значения функции. Дать геометрическую интерпретацию.

12. Записать таблицу производных.

13. Сформулировать правило Лопиталя.

**Тема 1.3. Исследование функциональной зависимости**

**Цели урока:**

Образовательная – сформировать представление о способах исследования функциональной зависимости.

Воспитательная – воспитание добросовестного отношения к учёбе, убедить, что хорошие накопленные знания и навыки способствуют усвоению нового материала.

Развивающая – развитие умения выделять существенные свойства, отличать их от несущественных.

**План занятия:**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: проверка присутствующих, краткий обзор изучаемого курса и общие требования, предъявляемые к учащимся, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

Общие свойства функции.

Исследование функции с помощью производных.

Асимптоты.

Общая схема исследования функции.

Изложение нового материала.

*Общие свойства функций*

Если для любого значения аргумента из области определения функции

*= f ()* выполняется равенство: *f (-)* = *f ()*, то функция называется

**чётной и** график её симметричен относительно оси ОУ (рис.8); если же

равенство *f (-)* = - *f ()*, то функция называется **нечётной**, её график симметричен относительно начала координат (рис.9).

Y

Y

X

X

рис.8. ( = ) Рис. 9. ( = )

Если существует такое число *Т, Т* 0, что для любого значения аргумента *х*  из области определения функции  *= f ( )* выполняется равенство *f*( *Т*) = *f*(), то функция  *= f ()* называется **периодической**, а число *Т* называется **периодом** функции (рис .10 и рис.11).

-

Y

X

Рис.10 ( = *sin ,* *T* = 2)

Y

X

-

Рис. 11 (*,* *T* =

Функция  *= f ()*  называется **возрастающей**,если изнеравенства следует, что  *f()*  *f()* и **убывающей**, если из неравенства следует, что *f()*  *f()*.

Функция называется **монотонной**, если она является возрастающей или убывающей.

Точка =, принадлежащая области определения функции вместе со своей некоторой окрестностью (| - ), называется **точкой максимума**, если выполняется *f* () для : | - , и **точкой минимума**, если ) ). Точки максимума и минимума называют точками **экстремума** (extr).

X

Рис. 12.

*Исследование функции с помощью производных*

*Признаки монотонности функции*

Если функция дифференцируема в некотором интервале и её производная сохраняет на нём свой знак, то функция **монотонна**, а. именно, является возрастающей, если 0, и убывающей, если 0.

*Необходимое условие экстремума*

Если функция  *= f ()* в точке имеет экстремум (max, min), то её производная в этой точке = 0 или не существует.

Точки из области определения функции, в которых её производная равна нулю или не существует, называются **критическими точками первой производной**.

*Достаточное условие экстремума*

Если при переходе через критическую точку первая производная меняет свой знак, то в этой точке функция достигает *max*, если изменение знаков происходит с «+» на «», и *min*, в противном случае.

**Достаточное условие выпуклости**

Если 0 для всех точек некоторого интервала, то функция является там **выпуклoй**, то есть её график лежит ниже любой её касательной на этом интервале (рис.13). Если же 0, то функция в этом интервале является **вогнутой,** то есть её график лежит выше любой её касательной на этом интервале (рис.14).

Рис.13. Рис. 14.

Правило для запоминания (правило эмоций):

«-» «+»

Рис. 15. () Рис.16. ()

Характерными точками графика функции, кроме точек экстремума, являются **точки перегиба,** то есть такие точки на графике функции, при переходе через которые направление выпуклости меняется на противоположное. Точка ( на графике функции (рис. 17) является точкой перегиба.

X

Рис.17.

*Асимптоты*

**Асимптота** – это прямая, расстояние до которой от точки графика стремится к нулю при движении точки по графику в бесконечность.

а) *вертикальная асимптота*

Прямая будет являться **вертикальной асимптотой** графика функции  *= f (x)*, если функция в окрестности точки является бесконечно большой величиной, то есть = .

На вертикальную асимптоту исследуют в точках разрыва и на концах области определения функции, если они не входят в неё.

б) *наклонная асимптота*

Прямая  ***k + b*** будет являться **наклонной асимптотой** графика функции *= f (x),* если одновременно существуют пределы:

*k =* , *b = .*

Если *k =* 0, то асимптота называется **горизонтальной.**

*Замечание.* Следует отметить, что функция может вести себя по-разному при подходе к точке слева и справа, а также при стремлении аргумента х к положительной или отрицательной бесконечности.

Пример. Найти асимптоты функции =

Решение

ООФ: (-.

Так как функция не определена в точке 2 ( 2), то исследуем её на вертикальную асимптоту. Для этого найдём односторонние пределы:

*= =* 0,

*= = +*

Рассматриваемая функция ведёт себя асимптотически только при подходе к точке справа.

Исследуем на наличие наклонных асимптот, вычисляя пределы:

*= =* 0,

b =  *= = =* 1.

Так как оба предела существуют, то функция имеет асимптоту, причём функции ведёт себя одинаково при . График функции на бесконечности стремится прижаться к прямой . Итак, получили, что функция имеет правостороннюю вертикальную асимптоту и горизонтальную .

Y

X

Рис.18.

*Общая схема исследования функции и построение её графика*

1. Нахождение ООФ.
2. Исследование на чётность (нечётность).
3. Исследование на периодичность.
4. Нахождение точек пересечения с осями координат.
5. Нахождение интервалов знакопостоянства функции.
6. Исследование на наличие асимптот.
7. Нахождение первой производной, её критических точек и исследование на монотонность и на наличие экстремумов.
8. Нахождение второй производной, исследование на выпуклость и вогнутость, а также на наличие точек перегиба графика функции.
9. Сведение результатов исследования в сводную таблицу.
10. Построение графика:

а) нанесение характерных точек (extr, перегиба, разрыва, пересечения с осями координат и границ ООФ);

б) построение асимптот (их проводят пунктирными линиями);

в) построение графика функции, проходящего через характерные точки с учётом монотонности, асимптотики и направления выпуклости.

Замечание:

1. Пункты 1 и 2 позволяют уменьшить область исследования.
2. Пункты 4 и 5 выполняют, если это легко делается.
3. Если = 0 принадлежит ООФ, а функция чётная, то в = 0 экстремум, у нечётной функции при = 0 на графике функции перегиб.

Пример.

Провести полное исследование функции *=* с построением графика.

Решение.

1. Функция определена *=* при 0, то есть при ООФ: (-; - 1) (-1; 1) (1; +.

2. Функция нечётная, так как *= = -* , (1; +).

3. Heпериодическая.

4. График пересекает координатные оси только а начале координат  *(0) = 0.*

5. При(0; 1), 0 0,

а при (1; + ), 0 0.

6. Исследуем функцию на наличие асимптот:

а) вертикальных

= = -

= = +

Прямая является вертикальной асимптотой нашей функции.

б) горизонтальных

= = =1,

b = = = = = = 0,

Прямая является наклонной асимптотой.

7. Вычислив первую производную

= = = = ,

найдём её критические точки: = 0 при = 1,7 и = 0.

**–**

**–**

+

X

0

**min**

1

рис. 19.

Найдём интервалы монотонности:

0 при (0; 1) (1; , следовательно, функция убывает, а так как 0 при (; +), то функция возрастает.

Первая производная при переходе через критическую точку = меняет свой знак с «» на «», поэтому в этой точке функции минимум:

*==*  2,6.

1. Найдём вторую производную

= = = = = ;

= 0 только при  *=* 0*.*

+

X

**–**

1

0

Рис.20.

0 при (0; 1),поэтому график функции обращён выпуклостью вверх, и выпуклостью вниз при (1; +), так как 0.

1. Данные исследований сводим в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y | =0 | 01 | =1 | 1 | = |  |
|  | 0 | *f(x)0* |  | *f(x)*0 |  | 0 |
|  | 0 | 0 функция убывает |  | 0 функция убывает | 0  min | 0 функция возрастает |
|  | 0 | 0 выпуклая |  | 0 вогнутая | --------- | 0 вогнутая |
|  |  | Вертикальная асимптота |  |  | Горизонтальная асимптота |  |

10. Построение графика начинаем с проведения осей координат. Затем проводим асимптоты пунктирными линиями и наносим характерные точки графика функции, которые соединяем плавной линией согласно данным таблицы. Построив график функции на положительной полуоси, распространяем его на левую полуплоскость нечётным образом (симметрично относительно начала координат). Видим, что точка (0; 0) является точкой перегиба графика.

График

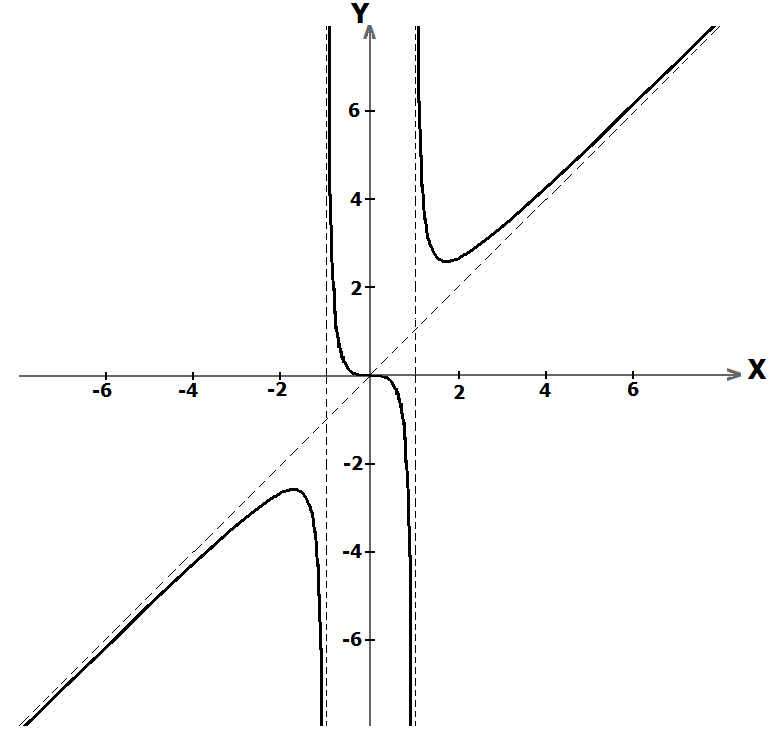


Рис.21.

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Какая функция называется чётной? Какой у неё график?

2. Какая функция называется нечётной? Какой у неё график?

3. Какая функция называется периодической? Какой у неё график?

4. Какая функция называется возрастающей (убывающей)на промежутке?

5. Дать определение монотонности функции.

6. Какая точка называется точкой максимума (минимума)?

7. Сформулировать необходимое условие экстремума.

8. Какие точки называются критическими точками первой производной?

9. Сформулировать достаточное условие экстремума.

10. Критерий монотонности функции.

11. Дать определение асимптоты.

12. Какие бывают асимптоты7

13. Условия существования асимптот.

14. Дать определение выпуклости (вогнутости) графика функции.

15. Дать определение точки перегиба.

16. Как установить направление выпуклости графика функции?

17. В какой последовательности нужно выполнять построение графика функции?

**Тема 1.4. Неопределённый интеграл**

**Цели урока:**

Образовательная – сформировать представление о первообразной, неопределённом интеграле и методах нахождения его.

Воспитательная – воспитание добросовестного отношения к учёбе, убедить, что хорошие накопленные знания и навыки способствуют усвоению нового материала.

Развивающая – развитие умения пользоваться правилами и таблицами.

**План занятия:**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Проверка усвоения пройденного материала (тем 1.1, 1.2 и 1.3).

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: проверка присутствующих, краткий обзор изучаемого курса и общие требования, предъявляемые к учащимся, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Первообразная и неопределённый интеграл.
2. Свойства и таблица неопределённого интеграла.
3. Методы интегрирования.

Изучение нового материала.

Функция *F()*, заданная на некотором промежутке Х, называется **первообразной** для функции *f(),* заданной на том же промежутке, если для всех *Х* выполняется равенство

***F()* = *f ()***, (т. е. *d F() = f d* )

Теорема. Если - первообразная для *f()* на промежутке Х, то для любого числа функция также является первообразной для *f().*

Действительно,  *= F(x) + = F’(x) = f().*

Совокупность всех первообразных функций для *f() называют* **неопределённым интегралом**этой функции и обозначают:

*= F() + C.*

*f(x)dx* –  *подынтегральное* выражение, *f()* –  *подынтегральная функция, – произвольная постоянная, .*

Пример.

= + .

Y

y

c = 1

1

X

c = 0

c = - 1

0

- 1

Рис.22.

*Свойства*

1. =  *= F’() = f();*
2. = *f()d;*
3. = *F() + C, = F + C, = + C;*
4. = ;
5. = A;

*Таблица интегралов*

1. = + , -1;
2. = + ;
3. = + , = + ;
4. = *sin +* , = - + ;
5. =  *+ ,*  =  *+ ;*
6. =*acrsin x + = - arcos + ;*
7. *=arctg + C =arcctg + ;*
8. *= + ;*
9. *= + .*

Докажем формулы 8 -9.

*= = .*

*б) = = = .*

*Методы интегрирования*

1. *Метод разложения.* С помощью тождественных преобразований исходный интеграл приводят к линейной комбинации табличных интегралов.

Примеры.

Найти интегралы.

1. *= = + = tg x – ctg x + C;*
2. = + + .
3. *Замена переменных*.

= =  *F(,* в частности,

*= F(a + b) + .*

Примеры.

1. = *sin 4 + ;*
2. *=* = *- cos t +* = *- cos +*

Сделализамену*: t = , dt = 3dx*;



Замена: *= a sin t, d* приводит к интегралу

=  *= + =*

Выполняя обратную замену, получаем

*+*

1. *Метод интегрирования по частям*.

=

. При разбиении подынтегрального выражения на множители нужно придерживаться следующих соображений:

а) По дифференциалу должна быть возможность нахождения функции ;

б) Вновь получаемый интеграл должен быть проще предыдущего.

Если подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена *P()* на функцию , или (где *a* – некоторое число), то за берут многочлен, а остальные сомножители за .

Если под знаком интеграла многочлен Р() умножается на логарифмическую функцию или обратную тригонометрическую ( *, ,*), то полагают , а остальные сомножители за .

Пример.

1. *=*

Положим , тогда

*=*

*+;*

1. *= - cos + = - cos + + ,*

*( );*

1. *=*

Проинтегрируем по частям (, 2 ; , ) =

*2 =*

Ещё раз применим формулу интегрирование по частям

(, ; , ):

*= 2( ) = 2 +2+.*

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Дать определение первообразной.
2. Что значит проинтегрировать функцию?
3. Почему потребовалось введения понятия неопределённый интеграл?
4. Перечислить свойства неопределённого интеграла.
5. Записать таблицу интегралов.
6. Как можно доказать справедливость равенств в таблице интегралов?
7. Перечислить методы нахождения неопределённого интеграла.
8. В чём состоит метод разложения?
9. Записать формулу замены переменной в неопределённом интеграле.
10. Записать формулу интегрирования по частям.

**Тема 1.5 Определённый интеграл**

**Цели урока:**

1. Образовательная – сформировать представление об определённом интеграле, его свойствах и методах вычисления.
2. Воспитательная – воспитание добросовестного отношения к учёбе, трудолюбию.
3. Развивающая – развитие умения выбирать методы и применять их на практике.

**План занятия:**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: проверка присутствующих, краткий обзор изучаемого курса и общие требования, предъявляемые к учащимся, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Определённый интеграл как предел интегральных сумм.
2. Свойства определённого интеграла.
3. Приближённое вычисление определённого интеграла
4. Приложения определённого интеграла.

Изучение нового материала.

Рассмотрим функцию *f () непрерывную на отрезке* [*a*; b]. Разобьём отрезок *a* b *произвольным* образом на *n*  частей: *a* = < < … < = b. Обозначим = - , = max - ранг дробления. В каждом отрезке [; *произвольным* образом выберем точку и вычислим в ней значение функции *f* и составим **интегральную сумму**

=

Если существует конечный предел интегральных сумм функции *f ()* на [*a*; b] при условии, что ранг дробления 0 при n (то есть все отрезки при n стягиваются в точку) и этот предел не зависит от способа дробления [*a*; b] на части и от выбора промежуточных точек , то такой предел называется **определённым интегралом** от функции  *f ()* в пределах от *a* до b (*a* – **нижний** предел интегрирования, b – **верхний** предел) и обозначается:

Y

*a* =

X

Рис. 23.

=

*Геометрический смысл определённого интеграла*

(*f () 0,*  [a; b])

Y

X

b

*24.*

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции, расположенной под графиком этой функции.

Доказательство.

Обозначим через – интегральные суммы, в которых в качестве промежуточных точек берутся те, в которых функция  *f ()* принимает наименьшие значения, через - возьмём те, где  *f ()* принимает наибольшие значения (это всегда выполнимо, т.к. *f ()* непрерывна на [*a*; b]). Криволинейная трапеция, расположенная под графиком функции  *f (),*  будет заключена между двумя ступенчатыми фигурами: вписанной с площадью равной и описанной с площадью .

При стремлении n величины и , являясь интегральными суммами, будут стремиться к :

Откуда следует, что = .

*Свойства определённого интеграла*

1. = - ;
2. = A;
3. =
4. = *b* – *a*;
5. = +, *a* c b;

(точку с берём за точку дробления и тогда интегральную сумму можно разбить на две интегральные суммы, одна будет соответствовать отрезку [*a; с*], другая – отрезку [с; b]).

1. Если 0, то 0 при b *a*;
2. , если  *f () ()* на[*a*; b];
3. m M(b – *a*),

где m = , M = ;

1. = *f(c)(b – a),* где c (*a*; b);
2. Если функция *f ()* имеет первообразную *( F’()* = *f ()),* то

*(формула Ньютона-Лейбница).*

Если при вычислении определённого интеграла используется замена переменной, то следует не забывать пересчитывать пределы интеграла.

Пример.

= 2 = 2 = 2 =

*, , 2t dt = d* ;

;

−) = 2(2 ln2(1 ln1)) = 2(2 ln2) = 2(1 ln2) = 2 ln4.

Определённый интеграл от непрерывной функции по конечному промежутку всегда существует, но у непрерывной функции может не быть первообразной. Интегралы от таких функций называют *неберущимися*. Если интеграл очень сложный или неберущийся, то используют численные методы интегрирования. Рассмотрим некоторые из них.

*Приближённое вычисление определённых интегралов*

Требуется вычислить интеграл , где - непрерывная на [*a*; b] функция. Разбиваем отрезок [*a*; b] на n *равных* частей:

*a* = < < < = b, где = *a +* *,*  = .

Вычисляем значения функции *f()* в точках *f(a) =,*  *f( )=, …, f(b)= =.* Рассмотрим формулы основанные на определении определённого интеграла как предела интегральных сумм.

1. *Формулы прямоугольников:*
2. ,
3. .

В правой части этих формул стоят интегральные суммы. В качестве промежуточной точки в первом случае брался левый конец промежутка, а во втором – правый. Таким образом мы функцию заменили кусочно-постоянной функцией.

*a* =

X

Y

Рис 25.

1. *Формула трапеций.*

Если исходную функцию заменим на кусочно-линейную функцию, принимающую в точках деления значения равные , то получится более точная формула:

1. .

X

Y

Рис. 26.*.*

1. *Формула Симпсона (парабол).*

Ещё более точная формула получится, если исходную функцию заменять на функции вида . Парабола однозначно определяется, если проходит через три заданные точки. Поэтому отрезок [*a*; b] разбиваем на чётное число *равных* частей n=2m.

.

Ошибки, совершаемые при использовании этих формул тем меньше, чем больше n, то есть чем меньше .

*Некоторые приложения определённого интеграла*

Определённые интегралы находят широкое применение в различных задачах. С их помощью можно вычислять:

1. Длину дуги плоской кривой = *,* заданной на[*a*; b]

L = .

1. Площадь плоской фигуры

=.

Y

X

b

*a*

Рис.27.

1. Объёмы тел вращения и через поперечное сечение

V=,

где S() - площадь поперечного сечения ( [*a*; b]).

Y

X

*b*

*a*

Рис.28.

1. Объём тела вращения вокруг оси криволинейной трапеции, расположенной под графиком функции

Y

X

b

*a*

Рис.29.

1. Площадь поверхности тела вращения

= 2π.

С помощью определённого интеграла можно вычислять также давление, работу переменной силы вдоль прямолинейного участка, массу стержня, массу и координаты центра тяжести, а также моменты инерции для однородных плоских фигур и плоских кривых и т. д.

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Дать определение интегральной суммы.
2. В чём заключается геометрический смыл определённого интеграла?
3. Перечислить свойства определённого интеграла.
4. Какая существует связь между определённым интегралом и первообразной?
5. Всегда ли применима формула Ньютона-Лейбница?
6. Какие методы приближённого вычисления интеграла Вы знаете? На чём они основаны?
7. Какие приложения определённого интеграла Вы знаете?
8. Что нужно сделать при вычислении площади плоской фигуры, если её верхняя граница состоит из графиков двух функций?
9. Чему равен определённый интеграл от нечётной функции, взятый по симметричному промежутку?
10. Чему равен определённый интеграл от чётной функции, взятый по симметричному промежутку?

**Тема 1.6. Комплексные числа**

**Цель урока:**

Образовательная – ознакомление с комплексными числами и операциями над ними, проверка усвоения фактического материала.

Воспитательная – воспитание добросовестного отношения к учёбе, воспитание дисциплинированности.

Развивающая – расширение кругозора, развитие умений применять знания на практике.

**План занятия:**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент. Проверка присутствующих, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Немного из истории расширения понятия «число».
2. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.
3. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Решение квадратного уравнения с вещественными коэффициентами для случая, когда дискриминант меньше нуля.

Изложение нового материала.

Сначала появились *натуральные числа* - N = {1,2,3, …}, которые можно было складывать умножать. Затем с необходимостью выполнять операцию вычитание пришлось ввести *целые* числа Z = {0,1,,. Операция деления потребовала введения *дробных чисел*. Все эти числа дробные и целые получили название *рациональные* числа. Геометрическим изображением этих чисел является числовая ось. На ней даже нашлось место для иррациональных чисел. Все эти числа рациональные и иррациональные полностью заполняют числовую ось и составляют множество R вещественных (действительных) чисел. Но операция извлечения корня чётной степени из отрицательного числа не выполнима в этом множестве. Опять нужно расширять понятие «числа». Так как вещественные числа полностью заполнили числовую ось, то единственный выход - перейти на плоскость, которую будем называть *комплексной*, а числа соответствующие точкам этой плоскости будем также называть *комплексными* и обозначатьбуквой **z**. Множество комплексных чисел, как и комплексную плоскость, принято обозначать буквой С.На комплексной плоскости вводятся две взаимно перпендикулярные оси:

горизонтальная ось - , называемая действительной осью (Re z), на ней располагаются вещественные числа z = 1=, где 1 – вещественная единица, обладающая свойством: = 1; вертикальная ось O, называемая мнимой осью (Jm z). На ней располагаются чисто мнимые числа z = , где - мнимая единица, обладающая свойством ;

Im z

Re z

Любое комплексные числа (z С) можно записать

Z = (, ) = 1 + = + , где –вещественные числа.

Представление комплексного числа в таком виде называется **алгебраической формой**.

– ***вещественная часть***, – **мнимая часть** числа z.

Числа , , соответствующие точкам симметрично расположенным относительно вещественной оси, называются ***комплексно-сопряженными.*** Число комплексно-сопряжённое данному числу обозначается .

Два комплексных числа и  *равны*, если = и = . Равным комплексным числам соответствует одна и та же точка на комплексной плоскости.

**Модулем** комплексного числа называется (как и для вещественных чисел) называется число, равное расстоянию от начала координат до точки, соответствующей комплексному числу : | | = = .

Угол , который образует радиус- вектор, определяющий точку ( с вещественной осью , называется **аргументом** комплексного числа . Выражая вещественную часть и коэффициент при мнимой части через модуль и аргумент комплексного числа

= ,

= ,

получаем **тригонометрическую форму** записи комплексного числа .

*Операции над комплексными числами*

1) ,

2) =

= () (.

Видим, что сложение и умножение производится по правилу многочленов, учитывая, что = -1;

Перемножая сопряженные числа и

,

получаем вещественное число. Используем этот факт для деления комплексных чисел в алгебраической форме: умножим делимое и делитель на число, сопряженное делителю; тогда делителем станет действительное число; разделив на него действительную и мнимую части делимого, получим частное.

, (где ||

Пример.

.

Замечание 1. Легко проверить, что если в сумме, произведении или частном заменить каждое комплексное число сопряжённым, то и результаты указанных действий заменятся сопряжёнными числами. Таким образом

, ,

.

Замечание 2. Если в многочлен с действительными коэффициентами

подставить вместо число + , а затем сопряжённое число , то результаты этих подстановок будут взаимно сопряжёнными.

Замечание 3. Если комплексное число + является корнем квадратного уравнения

()

с вещественными коэффициентами, то и сопряжённое ему число также будет являть корнем данного квадратного уравнения.

При нахождении корней квадратного уравнения () в области комплексных чисел всегда можно пользоваться формулой

*, г*де D=.

Если дискриминант D0 , то уравнение имеет два сопряжённых корня

()

Существует ещё одна форма записи комплексного числа, называемая *показательной*

При работе с комплексными числами можно пользоваться любой из трёх форм записи комплексного числа

.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для комплексных чисел и  + найти их сумму, разность, прозведение и частное от деления первого числа на второе.
2. Найти модуль и аргумент комплексных чисел

а) + , б) в) , г) .

1. Записать комплексные числа в тригонометрической форме

а) б) , в) , г) , д) .

1. Выразить числа из формулы () через коэффициенты квадратного уравнения ().
2. Найти все корни квадратных уравнений:

а) , б) , в) ,

г) , д) , е) .

1. Найти сумму и разность дух сопряжённых чисел.
2. Вывести условие равенства двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Почему были введены комплексные числа?
2. Как обозначается и чем отличается мнимая единица от вещественной единицы?
3. Геометрическое изображение комплексных чисел.
4. Ввести модуль и аргумент комплексного числа.
5. Записать алгебраическую форму комплексного числа.
6. Записать тригонометрическую форму комплексного числа.
7. Какие комплексные числа называются сопряжёнными? Как они расположены на комплексной плоскости?
8. По какому правилу выполняются операции сложения, вычитания и умножения комплексных чисел в алгебраической форме?
9. Какой приём используется при нахождении частного двух комплексных чисел, записанных в алгебраической форме?
10. Какие ещё кроме алгебраической существуют формы записи комплексного числа?
11. Записать условие равенства двух комплексных чисел.
12. Сколько комплексных корней может иметь квадратичное уравнение с вещественными коэффициентами?

**Тема 1.7. Дифференциальные уравнения**

**Цель урока:**

Образовательная – формирование первоначальных представлений о дифференциальных уравнениях и некоторых методах их решения.

Воспитательная - воспитание положительного отношения к получению знаний.

Развивающая – формирование умения классифицировать, выделяя главные признаки, не отвлекаясь на несущественные.

**План занятия:**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: проверка присутствующих, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Общие понятия.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка:

а) уравнения с разделяющимися переменными;

б) однородные уравнения;

в) линейные уравнения.

Изучение нового материала.

***Общие понятия***

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную , искомую функцию и её производные , , ... ,.

Символически дифференциальное уравнение можно записать так:

() F( , , , =0 или F()=0.

**Порядком**дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Уравнение ( является уравнением порядка.

***Решением или интегралом*** дифференциального уравнения называется всякая функция , которая будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Пример. Для уравнения функции , , и вообще функции вида являются решениями данного уравнения при любых значениях постоянных и : в чём легко можно убедиться, подставляя указанные функции в уравнение.

Пример.

Решениями уравнения будут функции вида , где С – любая постоянная. Действительно, дифференцируя эту функцию, находим +2. Подставляя и в исходное уравнение, получаем тождество:

+2

Видим, что дифференциальные уравнения и в первом и во втором примере имели бесчисленное множество решений.

*Дифференциальные уравнения первого порядка*

Уравнения первого порядка могут быть записаны по-разному:

1. F(, , ) = 0 (общий вид),
2. = *f*(, ) (разрешены относительно ),
3. M(, ) d + N(,) d = 0 (уравнение в дифференциалах).

**Решением дифференциального уравнения,** как было ранее сказано, является любая функция = (), обращающая дифференциальное уравнение в тождество.

В нашем курсе мы уже фактически решали простейшие дифференциальные уравнения первого порядка, когда отыскивали по известной производной = f() первообразную = F() + C, где (F() + C) = *f*(). При этом мы получали целое семейство функций зависящих от произвольной постоянной С.

Функция = (,С) называется**общим решением** дифференциального уравнения первого порядка, если

1. При любом конкретном значении С она при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.
2. Для любого **начального условия** найдётся такое значение , что (,) = .

Решение, получаемое из общего при фиксированном значении С, называется *частным**решением*.

График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой**.

Решение, получаемое в неявном виде, называется **интегралом дифференциального уравнения**.

*Уравнения с разделяющимися переменными*

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с* **разделяющимися переменными**, если его можно представить в виде

1. = ()() или
2. ()() d + ()() d = 0.

Методом решения дифференциального уравнения такого вида является **разделение переменных***.*

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

Решение

Это уравнение вида (5), то есть уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому, разделяя переменные, получаем уравнение

*d* = d,

которое интегрируем

= .

Интеграл от левой части = + - это табличный интеграл. В правом интеграле сделав замену переменной: ,

= = .

Общее решение

или .

Ради простоты 2 обозначили через , так как и 2 пробегают всю числовую ось (от до .

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

.

Решение

, , , () Окончательно получаем

.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения

, .

Решение

, ,

+ + , = , – общее решение.

Используя начальное условие, находим значение : 5 1,

Частное решение: = 5.

**Однородные уравнения первого порядка** – это уравнения, в которых производная зависит от отношения

= *f .*

Если дифференциальное уравнение задано в дифференциалах

*M*(*d + N()dy =* 0, то для того чтобы оно было однородным, функции, стоящие при дифференциалах, должны обладать следующими свойствами:

*M*( = *M*(,

*N(t) = N().*

Метод решения – **замена переменной *u* =**  , то есть вводится новая функция от х:

*u = u*(), , = *u + u*.

Применяя такую подстановку, придём к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

’ = .

Решение

*f( = ; f(tt)* = = = = *f(;*

*f( =*  – однородное уравнение.

*u* = , , ’ = *u’ + u*

*u’ + u = , u’ =* .

= ; = ; = + = = 1 - ;

= + .

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

*dy + () = 0.*

Решение.

Определяем вид уравнения:

*M*(t = = *t* = *t* *M*( k=1;

*N(t) = t = t= t N(), k=1.*

Так как это однородное уравнение, то вводим новую функцию ***u* =**

*dy = ,* тогда дифференциальное уравнение примет вид:

*) + ( ) = 0,*

*,*

*= , = , = +C.*

*=+C, =* С*.*

**Линейными уравнениями первого порядка**называются уравнения вида

*+ P() = Q(),*

где *P(), Q( –* известные функции от . Существует несколько методов решения этого уравнения. Ограничимся рассмотрением **метода Бернулли**.

Метод решения:

Решение уравнения ищем в виде , где и некоторые, пока неизвестные, функции переменной .

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

*’* + =

*.*

, ’ = + ;

+ + = (

+ ;

= 0;

= , = 2 + C, C=0,

, = ,

*u + =, ,*

*=, u = + C.*

*,*

*+ .*

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?

2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения? Сколько таких функций существует?

3. Дать определение порядка дифференциального уравнения.

4. Какой вид имеют начальные условия для дифференциального уравнения второго порядка?

5. Дать определение частного решения дифференциального уравнения.

6. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Указать метод его решения.

7. Записать вид линейного уравнения первого порядка. Указать метод его решения.

8. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?

9. Как выяснить, является ли уравнение в дифференциалах однородным уравнением?

**Тема 1.8. Дифференциальные уравнения второго порядка**

**Цель урока:**

Образовательная – изучение нового материала, совершенствование имеющихся знаний.

Воспитательная – воспитание добросовестного отношения к учёбе, воспитание дисциплинированности.

Развивающая – формирование умения применять знания на практике.

**План занятия:**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: знакомство со студентами, проверка присутствующих, краткий обзор изучаемого курса и общие требования, предъявляемые к учащимся, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
2. Линейные однородные уравнения (ЛОУ).

Изучение нового материала.

*Дифференциальные уравнения второго порядка*

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка

F (, , , ) = 0.

Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида = *f* (). Его решение можно получить путём двукратного интегрирования.

Пример 1. Решить уравнение

= + .

Решение. Так как = (), то

= = = + + ;

= = + , – произвольные постоянные.

Итак, мы видим, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка определяется двумя произвольными постоянными. Чтобы выделить частное решение задаются *начальные условия*:

Для уравнения = + из предыдущего примера найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

Решение. Из решения предыдущего примера мы имеем:

= + = + + .

Используя начальные условия, получаем систему уравнений для определения значения постоянных и :

Решения этой системы и подставляя в общее решение уравнения, получаем искомое частное решение = + 5.

*Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка*

1. Рассмотренное выше дифференциальное уравнение вида

,

в котором вторая производная зависит только от независимой переменной , относится к уравнениям, *допускающим понижение порядка*. С помощью введения новой функции , исходное уравнения преобразуется в уравнение первого порядка .

1. Если дифференциальное уравнение имеет вид

,

т.е. в запись уравнения не входит искомая функция , то понижение порядка достигается с помощью замены ( ): приходим к уравнению .

1. Если уравнение имеет вид

,

то используется замена , причём рассматривается как функция переменной . Так как , то подставляя в уравнение вместо производных следующие выражения , приходим к уравнению первого порядка.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

Решение. Если положим , то исходное уравнение примет вид

.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные

.

интегрируя почленно последнее равенство, получаем

где ,

или

Потенцируя последнее равенство, получаем . Так как , то из предыдущего равенства следует: . Почленно интегрируя полученное равенство окончательно получаем .

Пример 4. Для дифференциального уравнения

найти частное решение, удовлетворяющее **начальным условиям**

= 2, .

Решение. Уравнение не содержит независимую переменную , поэтому производя замену , приходим к уравнению

2.

Разделяя переменные

и почленно интегрируя, получаем

или

Так как то

Уже на этом этапе, используя начальные условия, можно определить значение

,

Учитывая найденное значение , получаем уравнение

или

Разделяя переменные

и, интегрируя, получаем

Используя начальные условия, находим значение , которое подставляем в искомое частное решение

Сделав некоторые преобразования, получаем окончательный результат

*Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

**Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами** называется уравнение вида

+ + = *f(),*

где , , – некоторые действительные числа, *f()* – некоторая функция от . Если функция *f()* = 0, то дифференциальное уравнение называется *однородным*:

(1) + + = 0.

Ограничимся рассмотрением однородных уравнений.

Они обладают следующими свойствами:

1. Если – некоторое решение уравнения (1), то также будет решением этого уравнения;
2. Если и – решения уравнения (1), то – также решения уравнения (1);
3. Если *линейно независимые* решения уравнения (1), то есть cost, то , где произвольные постоянные, является его общим решением.

Уравнению (1) сопоставляют алгебраическое уравнение

+ + = 0,

которое называется **характеристическим**.

Корни этого уравнения в области комплексных чисел всегда можно найти по формуле:

= , (где дискриминант D = )

или каким либо другим способом.

1. D 0, то есть – корни различные вещественные, то общее решение уравнения (1) имеет вид = ;
2. D = 0, то есть – корни вещественные равные, то общее решение

уравнения (1) имеет вид = ;

1. D 0, = – комплексно-сопряженные. В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид = ( ).

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения

+ 7 + 12 = 0,

удовлетворяющее начальным условиям: = 1, = 2.

Решение. Составляем характеристическое уравнение + + 12 = 0, его корни , . Общее решение: = + его производная равна

Для нахождения значений констант и , используя начальные условия, получаем систему уравнений:

Подставляя её решения = 6 и в общее решение, получаем

= 6 .

Пример 4. Найти частное решение дифференциального уравнения

6 + 9 = 0,

удовлетворяющее начальным условиям: = 7, = 27.

Решение. Составляем характеристическое уравнение + 9 = 0, = 0, его корни . Общее решение: = + ).

’ = 3(= .

Искомое частное решение: =

Пример 5. Найти частное решение дифференциального уравнения

’’+ 2’+ 26 = 0,

удовлетворяющее начальным условиям:

= 2, = 3.

Решение. Составляем характеристическое уравнение + + 26 = 0, его корни

(комплексно-сопряжённые). Общее решение: = .

= .

Учитывая начальные условия, получаем:

Следовательно, = 2, и искомое решение

= .

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Какое уравнение называется дифференциальным второго порядка?

2. Какой вид имеют начальные условия для дифференциального уравнения второго порядка?

3. Какое уравнение называется характеристическим?

4. Какие дифференциальные уравнения решают с использованием характеристического уравнения?

5. Может ли решение линейного уравнения быть периодической функцией?

6. Какие две функции называются линейно независимыми?

7. Для каких уравнений сумма решений также является решением этого уравнения?

8. Сколько произвольных постоянных содержится в общем решении дифференциального уравнения первого (второго) порядка?

9. Какая замена позволяет понизить порядок уравнения вида ?

10. В уравнении какого вида можно понизить порядок с помощью подстановки ?

РАЗДЕЛ 2.

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

**Тема 2.1. Вероятность случайного события**

**Цели занятия:**

Образовательная – обеспечение формирования первоначальных представлений теории вероятностей, ознакомление с такими понятиями как случайное событие и его вероятность.

Воспитательная – побудить к активной работе мысли.

Развивающая – формирование умения выделять существенные признаки и свойства и применять знания на практике.

**План занятия**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: проверка присутствующих, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Случайное событие и его вероятность.
2. Статистическое определение вероятности.
3. Классическое определение вероятности.

Изложение нового материала.

Задачи, исход которых нельзя предсказать с полной уверенностью, требуют изучения не только главных закономерностей, но и случайных, второстепенных факторов. Выявленные в таких задачах закономерности исследуются методами теории вероятностей и математической статистики.

*Теория вероятностей* – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовымслучайным явлениям, т.е. тем, исход которых невозможно предсказать.

**Опытом**  или **испытанием** называется некоторый комплекс условий.

Любой факт, который в результате опыта может произойти или нет называется **случайным событием** (или просто событием). Случайные события обозначать будем заглавными буквами латинского алфавита.

Событие называется **достоверным**, если оно в результате данного опыта непременно происходит.

Событие называется **невозможным**, если условия опыта исключают возможность его появления.

Пример 1. Из колоды в 36 карт произвольным образом извлекается одна карта. Случайными являются следующие события:

*A* – извлечён король пик,

*B* – извлечена карта чёрной или красной масти;

*С*  – извлечена карта зелёной масти,

*D* – извлечён туз.

Событие В является достоверным, а событие С невозможным событием. Будучи не в состоянии предсказать, какие именно события произойдут в результате данного опыта, тем не менее можно дать определённую количественную характеристику степени возможности осуществления тех или иных событий. Этой количественной характеристикой служит так называемая *вероятность события*.

**Вероятностью** случайного события называется численная мера степени объективной возможности осуществления события. Обозначается вероятность события *А* символом *Р(А)*.

Как покажем ниже вероятность случайного события

*Р(А)*  ,

вероятность невозможного события равна нулю, а достоверного события равна единице.

*Статистическое определение вероятности*

Пусть в повторяющихся опытах некоторое событие *А* наступило раз. Это число называется **частотой** события *А*, а отношение частоты события к числу проведённых опытов

называется **относительной частотой** события *А* в рассматриваемой серии опытов.

Очевидно, что для случайного события

.

Относительная частота невозможного события равна нулю, а достоверного события равна единице.

Относительная частота обладают свойством статистической устойчивости: с увеличением числа опытов она принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу.

**Статистической вероятностью** события *А* называется число, к которому стремится

()

или около которого колеблется

() .

Из статистического определения вероятности достаточно полно выявляется содержание этого понятия и свойства вероятности.

Статистическое определение вероятности обладает тем недостатком, что для надёжного определения вероятности нужно проделать достаточно большое число опытов.

*Классическое определение вероятности*

События называются попарно **несовместными**, если никакие два из них в данном опыте вместе произойти не могут.

В примере 1. События *А* и *D* – несовместные события, *В* и *D* – совместные события.

События в данном опыте называются **равновозможными**, если условия опыта предполагают одинаковую возможность их осуществления.

События образуют **полную группу**, если в результате опыта происходит хотя бы одно из данных событий.

Попарно-несовместные, равновозможные, образующие полную группу события назовём **исходами** или **элементарными событиями**.

Пример 2. Один раз бросается игральная кость. События , ,, , , - выпадение соответственно одного, двух, трёх, четырёх, пяти и шести очков. Это события равновозможные, попарно – несовместные. Они образуют полную группу.

Пусть производится опыт, которому можно сопоставить полную группу несовместных равновозможных событий (исходов).

Исход, который приводит к наступлению события А, называется благоприятствующим ему.

*Вероятностью события А*  называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу исходов

. (1)

Пример 3. Наугад указывается месяц и число високосного года. Какова вероятность того, что это будет воскресенье, если всего в этом году 53 воскресенья, а соответствие чисел дням недели неизвестно?

Решение.

В високосном году всего 366 дней, поэтому , а воскресных дней 53, то есть . Используя формулу (1)*,* находим искомую вероятность

.

Пример 4. В партии из 1000 изделий может оказаться не более четырёх бракованных. Наугад выбирается из партии одно изделие. Какова вероятность того, что она будет отвечать стандарту?

Решение

Пусть А - событие, состоящее в том, что выбранное изделие является стандартным. Число всевозможных исходов , благоприятствующих Используя формулу (1), получаем

.

*Формулы комбинаторики*

*Комбинаторика –* радел математики, в котором изучаются задачи выбора элементовпо заданным правилам и расположения их в группы, а также подсчёта числа получаемых групп.

Многие задачи комбинаторики могут быть решены с помощью правил сложения и умножения.

**Правило сложения**: если некоторый объект можно выбрать способами, а объект можно выбрать способами, причём первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов можно выбрать способами.

Пример 5. Если имеется 3 эклера и 2 корзиночки, то любимое лакомство можно выбрать способами.

**Правило умножения**: если некоторый объект можно выбрать способами, а объект можно выбрать способами, то выбор упорядоченной пары () может быть осуществлён способами.

Пример 6. В колоде карты четырёх мастей. Фигурами называются карты: валет, дама и король. , поэтому выбрать фигуру из колоды в 366 карт можно выбрать способами.

Пусть имеется множество, состоящее из различных элементов.

**Размещениями из элементов по** называются упорядоченные подмножества, содержащие элементов данного множества.

Из определения вытекает, что размещения – это соединения элементов, различающиеся между собой составом или порядком следования элементов.

Число размещений из элементов по вычисляется по формуле

(2)

или

, где (читается ) (3)

Если , то  размещения называются **перестановками из элементов***.* Они различаются друг от друга только порядком следования элементов. Число перестановок равно

(4)

**Сочетаниями из элементов по** называются любые подмножества, содержащие элементов данного множества. Сочетания различаются только составом элементов. Число сочетаний вычисляется по формуле

(5)

или

(6)

Можно показать, что

. (7)

(8)

*Действия над событиями*

**Суммой** событий  *А* и *В* называется событие *С= А + В*, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

**Произведением** событий *А*  и *В* называется событие *С = А В,* состоящее в совместном наступлении этих событий.

Пример 8. Опыт: из колоды извлечена одна карта. Обозначим событие, состоящее в том, что извлечена карта крести, буквой К, а что - дама буквой D. Событие (D состоит в том, что была извлечена какая-то карта крести или какая-то дама. Если произошло событие DК, это значит, что была извлечена дама крести.

**Противоположным** событию А называется событие , которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А (т.е. означает, что событие А наступило).

Пример 9. Опыт: производится один выстрел по мишени. Если событие означает попадание в мишень, то событие - это промах.

События называются **независимыми**, если наступление (не наступление) одного из них не влияет на возможность появления другого.

Пример 10. Опыт: бросили монету и игральную кость. События А (выпал «герб») и В (выпало чётное число очков) являются независимыми событиями.

Пример 11. Опыт: брошены последовательно три монеты. Событие А (выпадение «герба» на первой монете) оказывает влияние на возможность появления события В (выпадение хотя бы одной «решки»), поэтому эти события являются зависимыми.

Для характеристики влияния одного события на другое используется **условная вероятность** **P(A|B)** - вероятность появления события в при условии, что событие В произошло (*Р(В*))

*Основные формулы, которые можно использовать при решении задач*.

2. - для несовместных событий,
3. ,
4. P(A)
5. - для независимых событий,
6. (формула полной вероятности)

где , . . . , гипотезы, т.е. несовместные события, образующие полную группу,

1. (формула Байеса),
2. , m = 0,1,2,…,k. (формула Бернулли).

По формуле Бернулли вычисляется вероятность появления m раз события А в серии независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна p.

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Дать определение случайного события.
2. Когда применима классическая формула вероятности?
3. Классическое определение вероятности (формула)?
4. Сформулировать статистическое определение вероятности.
5. Дать определение относительной частоты.
6. Какие события называются несовместными?
7. Какие события называются равновозможными?
8. Когда события образуют полную группу?
9. В каких пределах может изменяться вероятность ( *Р(А)*  )?
10. Правило суммы?
11. Правило произведения?
12. Чему равно число размещений?
13. Чему равно число перестановок?
14. Чему равно число сочетаний?
15. Чем отличаются сочетания от перестановок и размещений?
16. Какие события называются независимыми?
17. Какое событие называется суммой данных событий и чему равна его вероятность?
18. Какое событие называется суммой данных событий и чему равна его вероятность?
19. Какое событие называется суммой данных событий и чему равна его вероятность?
20. Какое событие называется произведением данных событий и чему равна его вероятность?
21. Формула полной вероятности?
22. Формула Бернулли?
23. Какое событие называется противоположным данному событию?

**Тема 2.2. Случайные величины**

**Цели занятия:**

Образовательная – обеспечение формирования первоначальных представлений о случайных величинах, функциях распределения и числовых характеристиках случайных величин.

Воспитательная – побудить к активной работе мысли.

Развивающая – формирование умения выделять существенные признаки и свойства и применять знания на практике.

**План занятия**

Организационный момент.

Изложение нового материала.

Домашнее задание.

**Ход занятия**

Организационный момент: проверка присутствующих, сообщение планов на урок.

Вопросы к рассмотрению на занятии:

1. Случайные величины и способы задания закона распределения.
2. Числовые характеристики случайных величин.

Изложение нового материала.

*Случайные величины*

Случайные величины наряду с вероятностью и со случайными событиями являются важнейшими понятиями теории вероятностей.

Величина называется**случайной**, если в результате опыта она принимает одно из своих возможных значений, причём не известно заранее, какое именно. Обозначать случайные величины будем буквами

Случайная величина называется **дискретной**, если принимает конечное или счётное (можно перенумеровать) множество значений, т.е. её возможные значения на числовой оси будут изображаться изолированными точками.

Пример 1. Оценка на экзамене – дискретная случайная величина, принимающая одно из своих возможных значений (2, 3, 4, 5).

Случайная величина называется **непрерывной**, если множество её возможных значений несчётно, т.е. может принимать любые значения из некоторого промежутка. Примером непрерывной случайной величины может служить рост человека.

Для полного описания случайной величины кроме множества её возможных значений необходимо знать и вероятности этих значений.

Любое правило, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений, называется **законом распределения** случайной величины.

*Функция распределения случайной величины и её свойства.*

**Функцией распределения** случайной величины называется функция заданная на всей числовой оси и определяемая равенством

.

*Свойства функции распределения*

1. ограничена, т.е.

0.

1. .
2. – неубывающая функция, т.е. если то

.

1. Вероятность того, что случайная величина примет значение из промежутка [a,b), равна приращению функции распределения на этом промежутке, т.е.

.

Доказательство.

1. Первое свойство вытекает из определения и свойства вероятности.
2. (вероятность невозможного события),

(вероятность достоверного события).

1. , так как второе слагаемое, являясь вероятностью, величина неотрицательная.
2. Так как , то очевидно, что . Отсюда следует

Важнейшей характеристикой непрерывной случайной величины является плотность распределения вероятностей.**Плотностью распределения** вероятностей непрерывной случайной величины называется производная её функции распределения:

.

Из определения следует

.

Плотность распределения называют также **дифференциальной функцией распределения***,* а функцию – **интегральной функцией распределения**.

*Свойства плотности распределения*

1. .
2. .
3. .
4. .

Способы задания закона распределения дискретной случайной величины

1. **Ряд распределения**. Это таблица, в первой строчке которой перечисляются возможные значения дискретной случайной величины в порядке возрастания, а во второй – соответствующие им вероятности . Следует помнить, что

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | . . . |  | . . . |
|  |  |  | . . . |  | . . . |

1. *Многоугольник распределения*. Это графическое задание закона распределения. На оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а на оси ординат – вероятности этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки (), (), . . . называют **многоугольником распределения**.

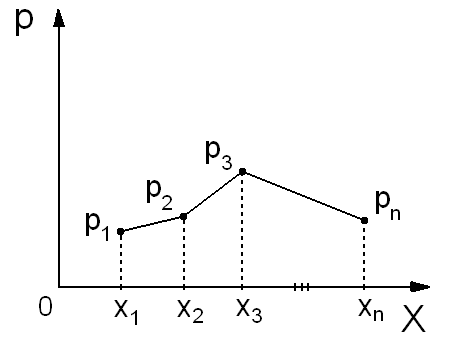


рис. 33

1. Формулой, позволяющей вычислить вероятность любого возможного значения (если это возможно).

Пример 2.

P (биномиальное распределение).

1. *Функция распределения*. Для дискретно случайной величины её можно вычислять по формуле:

*Числовые характеристики случайных величин*

При решении многих практических задач бывает достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства закона распределения случайной величины. Такие числа принято называть *числовыми характеристиками* случайной величины. Ограничимся рассмотрением двух основных.

*Математическое ожидание*

**Математическим ожиданиемдискретной** случайной величины , имеющей закон распределения , называется число, равное сумме произведений возможных значений на соответствующие вероятности.

.

Следует напомнить, что множество возможных значений случайной величины может быть не только конечным, но и бесконечным (счётным).

Математическое ожидание является *средним*  по вероятности значением случайной величины.

Пример 3. Пусть случайная величина – число выпавших очков при броске игральной кости. Так как вероятность выпадения любого числа очков равна , математическое ожидание будет равно среднему арифметическому возможных значений

Замечание. Если бы игральная кость была неправильной, т.е. с разной вероятностью выпадала на разные грани, то математическое ожидание «сместилось» бы к возможным значениям, принимаемым с большей вероятностью.

**Математическим ожиданием непрерывной** случайной величины с плотностью вероятности, называется число

.

Отметим, что имеет туже размерность, что и случайная величина.

*Свойства математического ожидания*

1. .
2. .
3. .
4. Если независимые случайные величины, то

.

*Дисперсия*

**Дисперсией (рассеянием)**случайной величиныназывается математическое ожидание квадрата её отклонения от своего математического ожидания. Обозначать её будем или .

Из определения дисперсии следуют следующие формулы для её вычисления:

(длядискретной случайной величины ),

(для непрерывной случайной величины).

На практике дисперсию удобно находить по формуле:

,

позволяющей вычислять дисперсии по другим формулам:

,

.

*Свойства дисперсии*

1. .
2. .
3. .
4. Если случайные величины независимы, то

.

Так как дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины , что в сравнительных целях неудобно, то вводится **среднее квадратическое отклонение**

*.*

Организация домашней работы учащихся: изучить конспект, проверить себя, отвечая на вопросы:

1. Какая величина называется случайной?
2. Какая случайная величина называется дискретной?
3. Какая случайная величина называется непрерывной?
4. Дать определение функции распределения.
5. Перечислить свойства функции распределения.
6. Дать определение плотности распределения.
7. Перечислить свойства плотности распределения.
8. Перечислить способы задания закона распределения дискретной случайной величины.
9. Какие числовые характеристики Вы знаете?
10. Дать определение математического ожидания дискретной случайной величины.
11. Вероятностный смысл математического ожидания.
12. Дать определение математического ожидания непрерывной случайной величины.
13. Дать определение дисперсии. Какое свойство случайной величины она характеризует?
14. По каким формулам можно вычислять дисперсию?
15. Почему вместо удобнее использовать ? Как эта характеристика называется?