# 227-275-197 Преподавание математики.

# Урок алгебры в 11 классе (занятие элективного курса) «Задачи с параметрами. Расположение корней квадратного трёхчлена». Учитель математики МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожного Московской области Лодина Виолетта Сергеевна.

 В классах с углубленным изучением математики часто практикуются решение задач на выяснение расположения корней квадратного трёхчлена. В общеобразовательных классах эта тема изучается на элективных курсах. Ниже предлагается описание моего опыта работы по данной теме в 11 классе на занятиях элективного курса «Решение задач с параметрами». Используются два способа: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной.

## Изучение нового материала.

****Теоретическая часть материала разбирается с помощью презентации. Рассмотрим все возможные пять случаев расположения корней квадратного трёхчлена$ аx^{2}+bx+c$.

**1 случай:** оба корня меньше $M$,

 т.е**.** $ x\_{1}\leq x\_{2}<M$ (Рисунок 1)

****$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\-\frac{b}{2a}<M или af^{'}(M)>0,\\af(M)>0.\end{array}\right.$

**2 случай:** один корень меньше,

а другой больше $M$, т.е**.** $x\_{1}<M<x\_{2 }$(Рисунок 2)

$$\left\{\begin{array}{c}D>0,\\af(M)<0.\end{array}\right.$$

****

**3 случай:** оба корня больше $M$,

 т.е. $M<x\_{1}\leq x\_{2}$(Рисунок 3)

****$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\-\frac{b}{2a}>M или af^{'}(M)<0,\\af(M)>0.\end{array}\right.$

**4 случай:** оба корня внутри интервала $(M;N)$,

 т.е. $M<x\_{1}\leq x\_{2}<N$(Рисунок 4)

****$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\af\left(M\right)>0.\\ af(N)>0,\\M<-\frac{b}{2a}<N,\end{array}\right.$ **или** $\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\af\left(M\right)>0,\\ af(N)>0,\\af^{'}\left(N\right)>0,\\ af^{'}(M)<0.\end{array}\right.$

**5 случай:**  $x\_{1}<M<N<x\_{2}$(Рисунок 5)

$\left\{\begin{array}{c}D>0,\\af(M)<0,\\af(N)<0.\end{array}\right.$

*Замечание.* **Следует особо рассмотреть случай** $a=0.$

## Упражнения для закрепления

Рассмотрим примеры применения рассмотренного учебного материала. Используем два способа решения: свойства квадратного трёхчлена и применение геометрического смысла производной. Учащимся выдаются таблицы (приложение №1). Задания№1, №2, №4 выполняют ученики на доске. Задания № 3,№5 выполняют самостоятельно (проверка решений с помощью презентации).

**№1. Найти значения** $a$**, при которых корни** $x\_{1 },x\_{2}$ **уравнения**

**2**$x^{2}-2\left(2a+1\right)x+a(a-1)$**=0 удовлетворяют условиям** $x\_{1}<a<x\_{2}$**.**

*Решение.* **Используем второй случай**. Составим систему неравенств .

$\left\{\begin{array}{c}D>0,\\2f\left(a\right)<0,\end{array} \right.\left\{\begin{array}{c}2a^{2}+6a+1>0,\\2\left(a^{2}+3a\right)>0.\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}2\left(a-\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\right)\left(a-\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\right)>0,\\2a\left(a+3\right)>0.\end{array}\right.$

** $\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}a>\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\\a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{c}a>0\\a<-3.\end{array}\right.\end{array}\right.$

*Ответ:* $a<-3, a>0$**.**

(Рисунок 6)

**№2.Найти все действительные** $a$**, при которых корни оба корня уравнения**

$\left(2a+3\right)x^{2}+\left(a+1\right)x+4=0 за$**ключены между -2 и 0, т.е.** $-2<x\_{1}\leq x\_{2}<0.$

*Решение***. Имеем четвёртый случай**. Составим систему неравенств.

$$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\\left(2a+3\right)f\left(0\right)>0,\\ \left(2a+3\right)f\left(-2\right)>0, \\-2<\frac{-a-1}{2\left(2a+3\right)}<0, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}2a^{2}-30a-47\geq 0\\2a+3>0,\\\left(2a+3\right)\left(3a+7\right)>0 ,\\\frac{a+1}{2a+3}>0,\\\frac{7a+11}{2a+3}>0,\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}2a^{2}-30a-47\geq 0\\2a+3>0,\\3a+7>0 ,\\a+1>0,\\7a+11>0,\end{array}\right. $$

$\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}a\geq 15+4\sqrt{17}\\a\leq 15-4\sqrt{17}\end{array}\right.\\a>-1,5,\\a>-2\frac{1}{3},\\a>-1,\\a>-1\frac{4}{7}.\end{array} \right.\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}a\geq 15+4\sqrt{17}\\a\leq 15-4\sqrt{17}\end{array}\right.\\a>-1.\end{array}\right.$

*Ответ:* $a>15+4\sqrt{17 }$**.** (Рисунок 7)

**№3.При каких** $a$ **корни** $x\_{1}, x\_{2} $ **уравнения** $\left(a-2\right)x^{2}-2\left(a+3\right)x+4a=0 $ **удовлетворяют условию** $x\_{1}<2<3<x\_{2}?$

*Решение***. Имеем пятый случай**.

$\left\{\begin{array}{c}D>0,\\\left(a-2\right)f\left(2\right)<0,\\\left(a-2\right)f\left(3\right)<0,\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}3a^{2}-14a-9<0,\\\left(a-2\right)\left(a-5\right)<0,\\\left(a-2\right)\left(7a-36\right)<0,\end{array}\right. $

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{7-\sqrt{76}}{3}<a<\frac{7+\sqrt{76}}{3},\\2<a<5,\\2<a<5\frac{1}{7}.\end{array}\right.$$

*Ответ*: $2<a<5.$(Рисунок 8)

**№4. При каких**$ a$ **корни уравнения**$ ax^{2}-2\left(2a-1\right)x+2-3a=0$

**удовлетворяют условию**$ x\_{1}>x\_{2}>1?$

*Решение.* **Имеем третий случай** $\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\af^{'}\left(1\right)<0,\\af\left(1\right)>0,\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}7a^{2}-6a+1\geq 0,\\a\left(a-1\right)>0,\\a\left(3a-2\right)<0,\end{array}\right. $ $\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}a\geq \frac{3+\sqrt{2}}{7}\\a\leq \frac{3-\sqrt{2}}{7}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{c}a>1\\a<0\end{array}\right.\\0<a<\frac{2}{3},\end{array}\right.$

*Ответ*: **ни при каких.** (Рисунок 9)

**№5. При каких**$ a$ **все решения уравнения** $\left(a-1\right)x^{2}-\left(a+1\right)x+a=0 $ **удовлетворяют условию** $0<x<3$**?**

*Решение.* **Имеет место четвёртый случай.**

$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0.\\\left(a-1\right)f\left(0\right)>0.\\\left(a-1\right)f\left(3\right)>0,\\\left(a-1\right)f^{'}\left(0\right)<0,\\\left(a-1\right)f^{'}\left(3\right)>0,\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}3a^{2}-6a-1\leq 0.\\a\left(a-1\right)>0.\\\left(a-1\right)(7a-12)>0,\\\left(a-1\right)\left(a+1\right)>0,\\\left(a-1\right)(5a-7)>0,\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}3(a-\frac{3-2\sqrt{3}}{3})(a-\frac{3+2\sqrt{3}}{3})\leq 0.\\a\left(a-1\right)>0.\\\left(a-1\right)(7a-12)>0,\\\left(a-1\right)\left(a+1\right)>0,\\\left(a-1\right)(5a-7)>0,\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\leq a\leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\\\left[\begin{array}{c}a<0\\a>1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{c}a>1\frac{5}{7}\\a<1 \end{array} \right.\end{array}\\\left[\begin{array}{c}a>1\\a<-1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{c}a>1,4\\a<1\end{array}\right.\end{array}\right.$

Если $a-1=0, a=1, x=0,5.$

*Ответ:* $a=1, 1\frac{5}{7}<a\leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$**.** (Рисунок 10)

## Упражнения для домашнего задания

**№1**. При каких$ с$ оба корня уравнения$ x^{2}+4cx+1-2c+4c^{2}=0$ меньше$ -1$?

**№2**. При каких$ a$ оба корня уравнения $\left(a+1\right)x^{2}-3ax+4=0$ больше $1$?

**№3.** При каких $a $один из корней уравнения $x^{2}-\left(3a+2\right)x+2a-1=0 $больше $ 1$, а другой меньше $ 1$?

**№4**. Найти все значения $a, $для которых один корень уравнения $2ax^{2}-2x-3a-2=0 $больше $ 1$, а другой меньше $ 1$?

**№5**. При каких$ a$ существует единственный корень уравнения $x^{2}-ax+2=0$ , удовлетворяющий условию $1<x<3$?

## Приложение №1: Расположение корней квадратного трёхчлена.

|  |  |
| --- | --- |
| **1 случай:** оба корня меньше $M$ | $x\_{1}\leq x\_{2}<M$**.** |
| $$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\-\frac{b}{2a}<M или af^{'}(M)>0,\\af(M)>0.\end{array}\right.$$ |  |
| **2 случай:** один корень меньше, а другой больше $M$ | $$x\_{1}<M<x\_{2}$$ |
| $$\left\{\begin{array}{c}D>0,\\af(M)<0.\end{array}\right.$$ |  |
| **3 случай:** оба корня больше $M$ | $$M<x\_{1}\leq x\_{2}$$ |
| $$\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\-\frac{b}{2a}>M или af^{'}(M)<0,\\af(M)>0.\end{array}\right.$$ |  |
| **4 случай:** оба корня внутри интервала $(M;N)$ | $$M<x\_{1}\leq x\_{2}<N$$ |
| $\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\af\left(M\right)>0.\\ af(N)>0,\\M<-\frac{b}{2a}<N,\end{array}\right.$ **или** $\left\{\begin{array}{c}D\geq 0,\\af\left(M\right)>0,\\ af(N)>0,\\af^{'}\left(N\right)>0,\\ af^{'}(M)<0.\end{array}\right.$ |  |
| **5 случай:** $ x\_{1}<M<N<x\_{2}$ |  |
| $$\left\{\begin{array}{c}D>0,\\af(M)<0,\\af(N)<0.\end{array}\right.$$ |  |
| *Замечание.* **Следует отдельно рассмотреть случай** $a=0$ |