Тюменская область Тюменский муниципальный район

Российская федерация

Выступление на семинаре учителей математики

Тюменского муниципального района

Тема выступления:

**Многовариантные планиметрические задачи. Решение задач**

Подготовила: учитель математики

МАОУ Андреевской СОШ

Рахимова А.М.

Январь,2013г.

**Многовариантные планиметрические задачи**

Геометрические задачи на вычисление в большинстве случаев представляют собой задачи на реализованныеситуации, то есть в них идет речь о некоторой заданнойконфигурации и требуется вычислить какой-либо ее элемент. Реализованность ситуации в условии задачи подразумевает лишь существование соответствующей конфигурации, но не предопределяет ее единственность. В таких задачах какие-либо исследования соотношений между числовыми данными, доказывающие существование конфигурации, являются излишними.

Приведем классификацию многовариантных планиметрических задач, не претендующую на отражение в полном объеме всего многообразия подобных задач, но включающая в себя большую часть, с которой придется столкнуться школьнику при подготовке к экзамену.

***Пример 1*.** Периметр равнобедренной трапеции равен 136. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении 9 : 25. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найти отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

*Решение.* В условии задачи неоднозначность возникает в результате того, что не указано конкретно, через какую вершину трапеции проходит данная прямая. Сама трапеция условием задачи задается однозначно. Действительно, поскольку в данную трапецию вписана окружность,

то (рис. 7.1) *AB* + *CD* = *BC* + *AD* = 68. Так как по условию трапеция равнобедренная, то *AB* = *CD* = 34. Тогда точка касания делит боковую сторону на отрезки, длины которых равны 9 и 25. Пусть точки *M*, *L* и *N* — точки касания окружности боковой стороны *AB* и оснований *BC* и *AD* соответственно. Тогда *AM* = 25, *MB* = 9. Так как отрезок *LN* перпендикулярен основаниям трапеции и точки *L* и *N* — середины оснований *BC* и *AD* соответственно,

а *MB* = *BL* и *AM* = *AN* (как касательные, проведенные из одной точки), то *BC* = 2*BL* = 18, *AD* = 2*AN* = 50.

Пусть высота трапеции равна *h*. Тогда S= BC+AD/2\*h=34h

Рассмотрим теперь возможные случаи расположения указанной

в условии задачи прямой.

1. Пусть прямая проходит через центр окружности и вершину *B*

(см. рис. 1) и пересекает прямую *AD* в точке *P*. Из равенства пря-

моугольных треугольников *OBL* и *OPN* следует, что *BL* = *NP* = 9:

sABP=1/2(AN+NP)\*h=17h

2 *SABP* *AN* *NP* ⋅*h* *h*

Следовательно,

SABP/SABCD=1/2

Поскольку трапеция равнобедренная, то для прямой, проходящей

через вершину *C*, получим тот же результат.

2. Пусть теперь указанная в условии прямая проходит через центр окружности и вершину *A* (рис. 2) и пересекает прямую *BC* в точке *E*, а бо-

ковую сторону *CD* в точке *Q*. Треугольник *ABE* — равнобедренный (угол *BEA* =

= угол *BAE* = угол *EAD*) и *AB* = *BE* = 34. Тогда *CE* = *BE* – *BC* = 16.

Треугольники *AQD* и *EQC* подобны с коэффициентом подобия *k, равным CE/*

*AD = 8/25.*

Так как высоты этих треугольников, опущенные из точки *Q*, относятся друг к другу с коэффициентом *k* и в сумме равны *h*, то высота *QH* треугольника *AQD* равна 25/33\*h. Тогда SAGD=1/2AD\*25h/33=625h/33

Следовательно, SABP/SABCD=625/33\*34=625/1122

Тот же результат получится и для прямой, проходящей через

вершину *D*.

*Ответ*: ½ или 625/1122.

***Методические указания.*** Анализ содержания задачной базы школьных учебников по геометрии показывает, что многовариантных задач практически нет, и поэтому они довольно непривычны для школьников. Следовательно, чтобы исключить ситуацию, когда выпускник впервые сталкивается с такой задачей непосредственно на экзамене, их нужно включать в учебный процесс. Причем делать это систематически, начав с достаточно простых задач, постепенно увеличивая их сложность.

Полезно при решении задач задавать вопросы. Например:

— Можно ли построить другую фигуру, неравную данной, но также удовлетворяющую условию задачи?

— При каких числовых значениях заданных элементов нельзя построить описанную в условии фигуру?

Ответы на подобные вопросы позволяют выявить различные ситуации, возникающие при решении задачи.

Проведем некоторую классификацию типов многовариантных задач, связанных с неоднозначностью описания взаимного расположения элементов фигуры, выделяя в каждом из них некоторые подготовительные задачи.

**Расположение точек на прямой**

В данном пункте рассмотрим расположение точек на одной пря-

мой или на двух прямых.

В качестве подготовительных задач можно предложить учащимся

следующие.

1. На прямой взяты точки *A*, *B* и *C* так, что расстояние между точками *A* и *B* равно 5, а между *B* и *C* равно 3. Найдите расстояние между точками *A* и *C*.

*Комментарий.* Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано взаимное расположение точек *A, B* и *C* на прямой относительно друг друга. Можно записать шесть различных вариантов расположения этих точек: *A*, *B*, *C* или *C*, *B*, *A*; *A*, *C*, *B* или *B*, *C*, *A*; *C*, *A*, *B* или *B*, *A*, *C.*

1. На прямой взяты точки *A*, *B* и *C* так, что точка *B* расположена правее точки *A* и *AB* : *BC* = 3. Найдите отношение *AC* : *AB*.

*Комментарий.* В данном случае необходимо рассмотреть только три различных варианта расположения этих точек: *A*, *B*, *C*; *A*, *C*, *B*; *C*, *A*, *B*.

**3.** Вычислите площадь треугольника, если две его стороны равны 25 и 17, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 15.

*Комментарий.* Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано,лежит или нет основание высоты, проведенной к третьей стороне, на ней. Возможно два варианта чертежа .

*Ответ*: 210 или 90.

**4.** Вычислите периметр трапеции, боковые стороны которой 25 и 17, высота

15, а одно из оснований равно 12.

*Комментарий.* В данном примере возможно только два варианта построения

трапеции: *ABCD* и *ABCD*1.

**Расположение точек вне прямой**

В данном пункте рассмотрим примеры расположения прямой и точки; примеры расположения двух точек по одну сторону от прямой или по разные; примеры взаимного расположения одной или нескольких точек и двух параллельных прямых. При этом точки могут располагаться в одной или разных полуплоскостях и связаны некоторым условием (например, принадлежат одной окружности, лежат на одном перпендикуляре и т.д.).

В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

**1.** Окружность радиуса 2 касается стороны AC прямоугольного треугольника

ABC в точке C. Найдите расстояние от вершины B до центра окружности, если катеты AB и AC треугольника равны 5 и 4 соответственно.

Комментарий. В данном примере возможны два случая, удовлетворяющие

условию задачи, так как центр окружности может лежать выше или ниже прямой AC. (слайд №

Дальше, используя теорему Пифагора, нетрудно получить ответ.

*Ответ*: 5 или √65.

**2.** Концы отрезка отстоят от прямой на расстояние 6 и 14. Найдите расстояние от этой прямой до середины данного отрезка.

Комментарий. Неоднозначность условия в том, что не указано, лежат концы отрезка в одной или разных полуплоскостях относительно прямой. Возможны два случая. Ответ:10 или 4.

3.Дан параллелограмм *ABCD*. Биссектрисы его углов *А* и *D* делят сторону *BC* на три равные части. Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 40.

*Решение.* Обозначим точку пересечения биссектрис через *М*, а точки пересечения биссектрис *АМ* и *DM* со стороной *BC* через *N* и *K* соответственно. В зависимости от расположения точки *М* относительно прямой (отрезка) *BC* возможны два случая.

1. Точка *M* лежит вне параллелограмма. Так как биссектриса *АМ*

отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник *ABN*

(рис. 7.16), то *AB* = *BN* = *NK* = *KC* = *x*.

Периметр параллелограмма равен 40, поэтому из уравнения 2(*x* + 3*x*) = 40 находим *x* = 5.

Значит, *AB* = 5, *BC* = 15.

2. Точка *M* лежит внутри параллелограмма (рис. 7.17), обозначив *NC* через *y*,

получим: *AB* = *BN* = 2*y*. Из уравнения 2(2*y* + 3*y*) = 40 находим *y* = 4.

Значит, *AB* = 8 и *BC* = 8 + 4 = 12.

Ответ: 5, 15 или 8, 12.

**Выбор обозначений вершин многоугольника**

К задачам этого типа относят задачи, условие которых допускает различные решения в зависимости от варианта буквенного обозначения вершин многоугольника.

***Пример 1*.** Диагонали *АС* и *BD* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *Е*. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника *AED* равна 9, а точка *Е* делит одну из диагоналей в отношении 1 : 3.

*Решение*. При решении данной задачи неоднозначность, как и в предыдущем примере, состоит в выборе варианта буквенного обозначения вершин трапеции и, дополнительно к этому, в выборе большего основания.

Пусть точка *E* делит каждую диагональ в отношении 1 : 3, считая от вершины верхнего основания.

1. Рассмотрим трапецию с основаниями *ВС* и *AD*. Треугольники *ВЕС* и *АED* подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия k=EC/AE=1/3. Значит, отношение площадей SBEC/SAED=1/9. Отсюда SBEC=1. Треугольники *АВE* и *ВЕС* имеют общую высоту, поэтому SABE/SBEC=AE/EC=3, SABE=3\*SBEC=3.
2. Аналогично *SDEC* = 3\**SBEC* = 3.
3. Следовательно, искомая площадь равна
4. *SABCD* = 1 + 3 + 3 + 9 = 16.

2. В остальных случаях, решая аналогично, получим:

*SABCD* = 3 + 9 + 9 + 27 = 48;

*SABCD* = 9 + 27 + 27 + 81 = 144

*Ответ*: 16, 48, 144.

**Пример 2**. Площадь трапеции ABCD равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найти площадь четырехугольника OMPN.

Решение. Возможны два случая, удовлетворяющие условию задачи и получающиеся в результате обозначения вершин.

1. Пусть *BC* = *a* — верхнее основание трапеции, тогда нижнее основание *AD* = 2*BC* = 2*a* (рис. 7.29) и *h* — высота трапеции. Площадь трапеции

SABCD=(a+2a)\*h/2=3ah/2=90.

Отсюда *ah* = 60.

Так как четырехугольники *ABCP* и *BCDP* — параллелограммы, то точки *M* и *N* являются точками пересечения их диагоналей. Тогда *BN* и *CM* — медианы треугольника *BCP*. Следовательно,

SOMPN=1/3SBCP=1/3\*1/2ah=1/6\*60=10

2. Пусть *AD* = *a* — верхнее основание, тогда *BC* = 2*AD* = 2*a* (рис. 7.30).

Так как треугольники *COB* и *AOD* подобны с коэффициентом подобия, равным 2, то высота треугольника *AOD* составляет 1/3 высоты трапеции *ABCD* и SAOD=1/2\*a\*1/3\*h= 10.

Соответственно, треугольники *CMB* и *PAM* подобны с коэффициентом подобия, равным 4. Тогда SPAM=1/2\*1/2\*a\*1/5\*h=1/20\*ah=3.

Аналогично получаем, что *SDNP* = 3. Тогда *SOMPN* = *SAOD*– *SPAM* – *SPAM* = 10 – 3 – 3 = 4.

*Ответ*: 10 или 4.

**Выбор некоторого элемента фигуры**

К задачам этого типа относят такие задачи, в условии которых дана числовая величина элемента фигуры, но не указано, какого конкретно из имеющихся. В случае линейного элемента это может быть, например, сторона многоугольника или длина отрезка перпендикуляра, опущенного на сторону фигуры, и т.д. В случае углового элемента это может быть, например, какой-то из углов фигуры.

В качестве подготовительных задач можно предложить следующие.

**1.** Найдите площадь равнобедренного треугольника, углы при основании которого равны 30°, если одна из его сторон равна 6.

*Комментарий.* Для получения ответа необходимо рассмотреть два случая. В первом случае равно 6 основание, во втором — боковая сторона.

*Ответ*: 3 3. или 9 3.

**2.** Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны 10, а один из углов равен 30°.

*Комментарий.* В этой задаче также необходимо рассмотреть два случая. В первом случае равен 30° угол при основании, во втором – при вершине.

*Ответ*: 25 или 25 3.

**Многовариантные планиметрические задачи: взаимное расположение фигур**

При решении задач условие может трактоваться неоднозначно, если для рассматриваемых фигур не указано их взаимное расположение. Можно выделить, например, следующие случаи, приводящие к неоднозначной трактовке условия задачи и касающиеся:

• взаимного расположения прямолинейных фигур;

• взаимного расположения окружностей;

• интерпретации аналитического способа решения задачи.

**Взаимное расположение прямолинейных фигур**

При рассмотрении данного пункта учащимся можно предложить подготовительные задачи следующего вида.

**1.** Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотрите возможные варианты построения на стороне *AB*:

а) равностороннего треугольника *ABP*;

б) квадрата *ABPQ*.

**2.** Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотрите возможные варианты расположения параллелограмма, вписанного в данный треугольник, так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника.

**Взаимное расположение окружностей**

Взаимное расположение окружностей можно различать по внешнему признаку (касающиеся, пересекающиеся, непересекающиеся) или по внутреннему (взаимное расположение центров окружностей относительно общей касательной, общей хорды и т.д.).

С учащимися полезно рассмотреть взаимное расположение окружностей с помощью динамической геометрической программы (например, «Живая геометрия» или «Wingeom»): двух окружностей, двух окружностей с общей касательной, двух окружностей с общей хордой. При перемещении одной окружности относительно другой учащиеся наглядно представляют наличие общих точек (одна, две, ни одной), возможные варианты касания окружностей (внешнее, внутреннее), варианты касательных (внешние, внутренние), расположение центров окружностей относительно общей хорды, общей касательной.

Из подготовительных задач можно предложить следующие.

**1.** К двум окружностям радиусов 6 и 3 проведена общая касательная. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами окружностей равно 15.

*Ответ*: 6√ 6 или 12.

**2.** Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *A* проведены диаметры *AC* и *AD* этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если *BD* = 7, *BC* = 13.

*Ответ*: 3 или 10.

**Расположение центров окружностей относительно их общей точки касания**

В условии задач этого типа фигурируют две окружности, но не указан тип касания (внешний или внутренний)

При решении таких задач полезно напомнить учащимся следующие факты:

1. При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.
2. При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем — по одну сторону.
3. Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов *R* и *r* (*R* ≥ *r*) равно *R* + *r* при внешнем касании и *R* – *r* при внутреннем.

**Интерпретация аналитического способа решения задачи**

Применение аналитического способа решения геометрической задачи может привести к ее многовариантности. Наличие нескольких корней уравнения подсказывает о возможном существовании нескольких конфигураций, которые требуют дальнейшего исследования с целью реализации условия для каждого из полученных корней уравнения.

**Интерпретация решения уравнения sin *x = a***

Если в составленном уравнении неизвестной является величина угла, то в конечном итоге решение его сводится к одному из простейших тригонометрических уравнений. Только одно уравнение вида sin *x* = *a*, 0 < *a* < 1, определенное на множестве чисел (0; π), имеет два корня α или π – α. На следующих простых задачах необходимо показать учащимся интерпретацию каждого из корней вышеприведенного уравнения.

**1.** Радиус окружности равен 1. Найдите величину вписанного

угла, опирающегося на хорду, равную 2. Ответ дать в градусах.

*Ответ*: 45° или 135°.

**2.** Площадь треугольника равна 12. Две его стороны равны 6 и 8.

Найдите угол между этими сторонами.

*Ответ*: 30° или 150°.

***Пример 15*.** Около треугольника *ABC* описана окружность с центром *О*, угол *АОС* равен 60°. В треугольник *ABC* вписана окружность с центром *М*. Найти угол *АМС*.

*Решение.* В равнобедренном треугольнике *АOС* (*OC* = *OA* = *R*)

угол при вершине равен 60°. Следовательно, треугольник *АOС* —

равносторонний и *AC* = *R*.

Используя следствие из теоремы синусов, получаем:

*AC* = 2*R* sin *B*, *R* = 2*R* sin *B*, sinВ=1/2.

Отсюда F *B* = 30° или F *B* = 150°.

1. Пусть F *B* = 30° (рис. 8.27), тогда F *A* + F *C* = 150°. Центр вписанной окружности *М* лежит на пересечении биссектрис треугольника, значит,

F *MAC* + F *MCA* = 150° : 2 = 75°.

Тогда F *AMC* = 180° – 75° = 105°.

2. Случай, когда F *B*1 = 150°, решается аналогично.

*Ответ*: 165° или 105°.

**Литература**

**1.** *Гордин Р.К.* ЕГЭ-2011. Математика. Задача С4. Геометрия. Пла-

ниметрия / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО,

2011.

**2.** *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика. ЕГЭ-2011 (типо-

вые задания С4). Планиметрические задачи с неоднозначностью в

условии (многовариантные задачи). URL: http://www.alexlarin.net/

ege/2011/C4-2011.pdf

**3.** *Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С.* Учимся решать

задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. — К.: Магистр, 1996

(глава IV «Многовариантные задачи»).

**4.** *Цукарь А.Я.* О полезности интерпретации решения задачи //

Математика в школе, 2000, № 7.