«Многие идеи как бы имеют свою эпоху, во время которой они откры­ваются одновременно в различных местах подобно тому, как фиалки произрастают всюду, где светит солнце». •

Янош *Больяи*

 1. С разнообразными геометрическими фигурами, с измерением длин, площадей и объемов людям приходилось иметь дело с неза­памятных времен. В практических наблюдениях они подмечали раз­личные геометрические закономерности. Так, древние египтяне зна­ли из опыта, что треугольник, у которого одна сторона равна трем единицам, вторая — четырем, а третья — пяти единицам, обяза­тельно имеет один прямой угол. В дошедших до нас древне­египетских письменных памятниках — в Московском папирусе и папирусе Ахмеса «Наставление, как достигать всех темных ве­щей, всех тайн, содержащихся в предметах» содержатся важные гео­метрические факты, например, формула для вычисления объема пирамиды.

Когда геометрических сведений накопилось много, то их стали приводить в определенную систему, стали пытаться вывести из них путем рассуждения, без непосредственного обращения к опыту, новые геометрические факты.

Особенно большие достижения в этом направлении были полу­чены древнегреческими философами в VII—III веках до нашей эры. Так, греческий философ Фалес из Милета установил, что сумма уг­лов треугольника равна двум прямым углам. Однажды, во время путешествия в Египет, он поразил египетского фараона, когда на­шел с помощью известных ему геометрических фактов высоту пира­миды, не поднимаясь на нее. Важные геометрические факты были установлены в шкодах знаменитых философов: Пифаго­ра (VI век до нашей эры), Евдокса, Менехма, Платона и других.

Примерно в V веке до нашей эры возникла мысль о том, чтобы из­ложить геометрию как единую науку, попытаться все известные гео­метрические факты вывести с помощью логических рассуждений из небольшого числа простейших фактов, которые можно принять без доказательства. И несколько ученых в V—IV веках до нашей эры пытались это на самом деле сделать (Гиппократ, Леоннати Другие).

Эти попытки нашли свое завершение в одной из самых замеча­тельных книг, когда-либо созданной людьми, в самом знаменитом математическом сочинении — в книге «Начала» Евклида Александ­рийского, завершенной им около 300 года до нашей эры.

2. Евклид начинает свою книгу с того, что дает определения тех понятий, которыми он собирается пользоваться в дальнейшем.

На­пример, определение 1: «Точка есть то, часть чего есть ничто». За­тем он приводит несколько предложений, которые принимает без доказательства — постулаты (допущения) и аксиомы. Разница меж­ду постулатами и аксиомами не принципиальна, и сейчас между ними не делают различия. Вот, например, первый постулат: «Ог всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию».

Современников и людей, живших позднее Евклида, поражало то, что из этих немногих предложений и вводимых в книге опреде­лений Евклиду удается получить громадное количество важных гео­метрических сведений, всю геометрию, и притом только рассужде­нием, без всяких опытов и экспериментов. Это было блестящим про­явлением мощи логического рассуждения. По этой причине книга Евклида в течение двух тысячелетий служила, в переработках раз­личных авторов, учебником геометрии. Нередко люди, чтобы усо­вершенствоваться в умении логически рассуждать, обращались как к образцу к этой книге. Так, например, поступил (как он об этом сообщал в своей автобиографии) президент Соединенных Шта­тов Линкольн (возглавлявший 100 лет назад борьбу за освобожде­ние негров).

Книга Евклида служила образцом научного сочинения для ученых самых разнообразных специальностей. По образцу Евклидовых «Начал» излагали свои учения крупнейшие философы, например Спиноза (Голландия, 1632—1677) и Гоббс (Англия, 1588—1679). Книга Евклида послужила образцом для Ньютона, когда тот создавал свои знаменитые «Математические начала нату­ральной философии» (то есть физики).

 Последний в списке постулатов Евклида, пятый, привле­кал особое внимание в течение многих столетий. Вот как можно его сформулировать.

*Если прямая на плоскости, пересекающая два данных прямоли­нейных отрезка, образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то при неограниченном про­должений этих отрезков они пересекутся (и притом по ту же сто­рону, где лежат эти углы).*

Этот постулат вызвал много критических замечаний. Одни об­ращали внимание на то, что это предложение громоздко (сравните с первым постулатом). Другие считали, что в качестве постулата естественно принять такое предложение, которое, действительно, очевидно, между тем как пятый постулат им не представлялся дос­таточно очевидным. Третьи видели недостаток пятого постулата в том, что в нем говорится о *неограниченном* продолжении отрезков, так что возникает необходимость рассматривать всю *бесконечную* плоскость и нельзя ограничиться лишь конечной ее частью. Мнение всех сходилось на том, что Евклид, видимо, просто не сумел дока­зать пятый постулат и только по этой причине включил его без до­казательства.

Евклид, как видно, сам недолюбливал свой пятый постулат, терпел его только потому, что вовсе обойтись без него ему не уда­валось, хотя он и стремился, по мере возможности, им не пользо­ваться. В первой части («книге») своих «Начал» он использует пя­тый постулат только один раз, а именно при доказательстве своего двадцать девятого предложения: «Если две прямые параллельны, то они в пересечении с третьей прямой образуют равные внутренние накрест лежащие углы»,

Много лет спустя, через два тысячелетия после Евклида, один англичанин, Плейфер, заметил, что пятый постулат равносилен та­кому менее громоздкому предложению, которое называют сейчас «аксиомой о единственности параллельной» и которое теперь вклю­чают в школьные учебники:

*Через точку вне данной прямой в плоскости, определяемой этой прямой 'и этой точкой, проходит единственная прямая, не пересе­кающая данную.*

Это, разумеется, не снимало тех возражений, которые приво­дились геометрами против пятого постулата.

В самом деле, *принимаем* предложение о единственности парал­лели без доказательства — и в то же время *доказываем* предложение о единственности перпендикуляра: «Через точку вне данной пря­мой в плоскости, определяемой этой прямой и этой точкой, проходит единственная прямая, перпендикулярная данной». В смысле очевидности они примерно равноправны. Но если удается доказать второе из этих предложений, то, может быть, и первое из них (аксио­му о единственности параллельной) можно доказать? Может быть, зря мы это предложение принимаем в качестве аксиомы? Может быть, у Евклида и других геометров просто не хватило воображения, смекалки, чтобы доказать это предложение, но доказательство все же можно найти?

Отсутствие доказательства пятого постулата в «Началах» Ев­клида рассматривалось многими математиками как крупнейший и нетерпимый недостаток этого сочинения. Специальные научные трактаты посвящались исправлению этого «недостатка». Вот наз­вания некоторых из них: «Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных» {Насир ад Дин ат Туей), «Усовершенствование кни­ги «Начала» (аль Джаухари), «Евклид, очищенный от всяких пятен» (Саккери).

Сотни профессиональных геометров разных времен и народов, тысячи любителей математики в течение 20 веков находили остро­умнейшие «доказательства» пятого постулата. Доказательства его искали, например, такие известные ученые, как Клавдий Пто­лемей (Египет, II век нашей эры), Посидоний (Рим, I век до нашей эры), Прокл (Греция, V век нашей эры), Насир ад Дин (Узбекистан, XIII век), Валлис (Англия, XVII век), Ламберт (Швейцария, XVIII век), Лежандр (Франция, XVIII век), Саккери (Италия, XVIII век), Ф. Бойяи (Венгрия, XIX век), Лобачевский (Россия, XIX век), Гаусс (Германия, XIX век) и многие другие. Странно было только то, что всегда в каждом «доказательстве» после тщательного анализа обнаруживалась какая-нибудь ошибка. Доказательство пятого пос­тулата ускользало от искусных математиков в тот момент, когда они уже как будто достигали цели. Люди тратили на охоту за таким до­казательством многие годы и в итоге получали только разочарование.

Один математик полтораста лет назад писал по этому поводу своему сыну, студенту-математику: «Не пытайся одолеть теорию параллельных ни тем способом, о котором ты писал мне, ни каким-либо другим. Я изучил все пути. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Ради бога, молю тебя, оставь эту материю, потому что она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни».

3. Решение проблемы пятого постулата оказалось неожидан­ным.

24 февраля 1826 года в Казани выступил с докладом профессор математики местного университета Николай Иванович Лобачев­ский (1792—1856). Он пришел к выводу, что пятый постулат вообще не может быть доказан на основании других аксиом и постулатов, обычно приводимых или подразумеваемых в школьных учебни­ках геометрии; Евклид был прав, приняв пятый постулат без доказательства—его действительно нельзя доказать, если не вклю­чить вместо него в список аксиом или постулатов другое предло­жение, равносильное пятому постулату. Иначе говоря, пятый постулат независим от остальных аксиом элементарной геометрии.

Идеи, положенные в основу неевклидовой геометрии Лобачевского, возникли почти одновременно в разных странах: в России у Лобачевского, в Венгрии у Бойай и в Германии у Гаусса. Различна степень участия каждого из этих учёных в создании новой геометрии; раз­лична и степень упорства, с которой каждый из них рабо­тал в этой новой области математики; наконец, различна и степень смелости, с которой они отстаивали правоту своих взглядов.

Карл Гаусс (1777—1855), придя к мысли о воз­можности существования наряду с геометрией Евклида, иной, неевклидовой геометрической системы, побоялся, что новые идеи не будут поняты, и поэтому, сделав первые шаги в этой области, отказался от дальнейшей разработки этих идей и не опубликовал их.

Янош Бойай (1802—1860), выдающийся венгер­ский математик, пошёл дальше Гаусса. Он изложил сущ­ность своих взглядов в 1832 г. в приложении («Аппендикс») к первому тому сочинений своего отца. Несмотря на край­нюю сжатость изложения, «Аппендикс» Бойай принадле­жит к числу наиболее совершенных произведений мате­матической литературы. Но у него не хватило упорства, а может быть, и здоровья далее развить свои идеи. Воз­можно, что на Бойай удручающе подействовал отказ Гаусса поддержать его новые взгляды. Во всяком случае после 1832 г. Бойай не опубликовал ни одной работы по геометрии.

Николай Иванович Лобачевский, более сме лый, чем Гаусс, и более упорный, чем Бойай, до конца своей жизни находил силы для борьбы за правоту высказанных им идей. Его не испугали ни полное непониманиеэтих идей математиками — современниками Лобачевского, ни насмешки некоторых из них. Уже в первой работе Лобачевский сумел развернуть неевклидову геометрию несравненно шире и глубже, нежели это было сделано Гауссом и Бойай, не говоря уже о его последующих работах в этой области.

4. То, что через точку, лежащую вне прямой, можно в плоскости, определяемой ими, провести новую прямую, не пересекающую первую, является фактом, который легко доказывается и притом независимо от аксиомы о парал­лельных.

В самом деле, если через точку *А,* данную вне прямой *KL,* провести произвольную прямую *АВ,* пере-



секающую *KL* в точке *С,* то, построив новую прямую *MN* так, чтобы она проходила через ту же точку *А* и образовы­вала угол М*АС,* равный  *углу ACL,* то прямая *MN* и будет той прямой, которая не пересечёт *K.L.* Предположив обратное, мы пришли бы к выводу, что внешний угол *( угол МАС)* тре­угольника *АСР* равнялся бы внутреннему углу *АСР,* что невозможно.

Из этой теоремы, как частный случай, следует, что два перпендикуляра к одной и той же прямой не могут иметь общей точки.

Итак, установлено, что через каждую точку А, вне пря­мой *KL* в плоскости, определяемой ими, можно провести такую прямую *MN,* которая не пересечёт прямую *K.L.*

Далее вполне естественно возникает вопрос; проходит ли через точку *А* одна такая прямая или таких прямых существует более одной? Этот вопрос можно поставить и по-иному. Существует ли уверенность в том, что та плоскость, на которой производится построение прямой непременно должна обладать свойством, позволяющим построить на ней только одну такую прямую? Даже при создании «Начал» Евклида (III в. до н. э.) такой уверен­ности не было, и она не появилась и в более поздние века. Об этом свидетельствует ряд попыток доказать справедли­вость утверждения о существовании только одной прямой, проходящей через точку Л и не пересекающей прямую *KL.* Попытки таких доказательств возникали, по-видимому, ещё до Евклида и, несмотря на неудачу, не прекращались на протяжении более. 2000 лет. Опублико­вание работ Н. И. Лобачевского сначала уменьшило число таких доказательств, а затем и совсем положило им конец.

Если у нас нет уверенности в этом вопросе, то мы стоим перед двумя возможностями, одинаково равноправными: первая возможность — принять, что- через точ ку вне прямой на данной плоскости можно провести только одну прямую, не пересекающую данную прямую; вторая возможность — принять, что таких прямых можно провести больше одной. Евклид при создании своих «Начал» пошёл по первому пути, включив в число своих аксиом аксиому о параллельных.

С двенадцатилетнего возраста нас приучали следовать в вопросе о параллельных за Евклидом. Поэтому нам так же трудно сойти с привычного пути, как было когда-то трудно людям, верившим в истинность системы мира, созданной Птолемеем, почувствовать себя в ином мире — мире Коперника. Правда, в последнем случае нужно было заменить привычный, ошибочный взгляд на окружающий нас мир истинным и совершенно противоположным. В вопросе же геометрии нам не говорят, что мы шли по не­верному пути; нас только предупреждают, что есть и иной путь, чем путь Евклида, в рассуждениях о параллельных.

5. Однако ни это открытие Лобачевского, ни убедительное обосно­вание его выводов, полученное несколько позднее, ни признание этих выводов крупнейшими математиками второй половины XIX ве­ка не успокоили искателей доказательства пятого постулата. В раз­ных странах люди по-прежнему занимались (и до сих пор кое-где занимаются) поисками, теперь уже явно безнадежными. По-преж­нему появлялись брошюры, статьи, рукописи с такими «доказатель­ствами». Например, в 1913 году появилась брошюра преподавателя математики О. Вржесневского «Доказательство «аксиомы» парал­лельных прямых». А когда профессор Московского университета Б. К. Млодзеевский высказал автору свои возражения, последний «опроверг» их во втором, дополненном издании своей брошюры, со­держащей выразительное посвящение: «Посвящается тем, кто мыс­лит глубоко...»

А вот другая брошюра, в которой «доказывается» пятый посту­лат; ее издал в 1926 году некто М. М. Гаркуша под названием «Парал­лельные линии. Постулат Евклида. В чем ошибка Лобачевского?»

Вывод о независимости аксиомы о единственности параллель­ной от других общепринятых геометрических аксиом представляет собой, казалось бы, весьма частный вопрос геометрии. В действи­тельности же он сыграл громадную роль в истории математики. Он привел к пересмотру и перестройке всей геометрии и заставил ма­тематиков глубже вникнуть в вопросы обоснования различных ма­тематических дисциплин.

Список литературы:

1. Математика после уроков. В.Б. Балк, Г.Д. Балк
2. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. А.А. Колосов.