

Учебный центр «Резольвента»

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие
для подготовки к ЕГЭ по математике

© С. С. Самарова, 2010

© ООО «Резольвента», 2010

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2(x+1) + \log_2 x = 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_2(x+1) + \log_2 x = 1 &\Rightarrow \log_2 x(x+1) = 1 \Rightarrow x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1. \end{aligned}$$

Поскольку под знаком логарифма не может быть отрицательного числа, то случай $x_1 = -2$ должен быть отброшен.

Простая проверка показывает, что значение $x_2 = 1$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: 1.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_{x-1} 9 = 2$$

Решение.

$$\log_{x-1} 9 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 9 \Rightarrow (x-1)_1 = -3, (x-1)_2 = 3.$$

Поскольку основание логарифмов не может быть отрицательным числом, то первый случай должен быть отброшен. Далее получаем:

$$x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Простая проверка показывает, что число $x = 3$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 3.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + \log_3 \sqrt{3x+1} = 0$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + \log_3 \sqrt{3x+1} = 0 &\Leftrightarrow -\log_3(x-3) + \log_3 \sqrt{3x+1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3 \sqrt{3x+1} = \log_3(x-3) &\Rightarrow \sqrt{3x+1} = x-3 \Rightarrow 3x+1 = (x-3)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x+1 = x^2 - 6x + 9 &\Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 8. \end{aligned}$$

Число $x_1 = 1$ не входит в область определения уравнения, поскольку в этом случае число $x - 3$, стоящее под знаком логарифма, будет отрицательным.

Простая проверка показывает, что число $x = 8$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 8.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_x 10 + \log_{x^4} 100 = 6$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_x 10 + \log_{x^4} 100 = 6 &\Leftrightarrow \log_x 10 + \frac{2}{4} \log_x 100 = 6 \Leftrightarrow \log_x 10 + \frac{1}{2} \log_x 100 = 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_x 10 = 6 &\Leftrightarrow \log_x 10 = 4 \Rightarrow x^4 = 10 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[4]{10}, x_2 = \sqrt[4]{10}. \end{aligned}$$

Поскольку основание логарифмов не может быть отрицательным числом, то первый случай должен быть отброшен.

Простая проверка показывает, что число $x = \sqrt[4]{10}$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\sqrt[4]{10}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1 &\Rightarrow \log_{2^2}(x+12) \cdot \frac{1}{\log_2 x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2(x+12)}{\log_2 x} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\log_2(x+12)}{\log_2 x} = 2 \Rightarrow \log_x(x+12) = 2 \Rightarrow x^2 = x+12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 4. \end{aligned}$$

Поскольку основание логарифмов не может быть отрицательным числом, то первый случай должен быть отброшен.

Простая проверка показывает, что число $x = 4$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_3 \sqrt{x} + \frac{3}{2} = \log_x \left(\frac{1}{3} \right).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt{x} + \frac{3}{2} = \log_x \left(\frac{1}{3} \right) &\Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{3}{2} = -\log_x 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_3 x + 3 = -\frac{2}{\log_3 x} \Rightarrow \log_3 x + 3 + \frac{2}{\log_3 x} = 0 \Rightarrow \frac{(\log_3 x)^2 + 3\log_3 x + 2}{\log_3 x} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_3 x)^2 + 3\log_3 x + 2 = 0, \log_3 x \neq 0 \Rightarrow (\log_3 x)_1 = -2, (\log_3 x)_2 = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}, x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Поскольку область определения уравнения имеет вид:

$$x > 0, x \neq 1,$$

то оба найденных значения в неё входят, и, следовательно, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{9}; \frac{1}{3}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_6 x^2 - \log_x \frac{1}{6} = 3.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_6 x^2 - \log_x \frac{1}{6} = 3 &\Rightarrow 2\log_6 x + \log_x 6 = 3 \Rightarrow 2\log_6 x + \frac{1}{\log_6 x} = 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\log_6 x + \frac{1}{\log_6 x} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{2(\log_6 x)^2 - 3\log_6 x + 1}{\log_6 x} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(\log_6 x)^2 - 3\log_6 x + 1 = 0, \log_6 x \neq 0 \Rightarrow (\log_6 x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_6 x)_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow (\log_6 x)_1 = \frac{1}{2}, (\log_6 x)_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6}, x_2 = 6. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что оба найденных значения являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\sqrt{6}; 6$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\lg(19 + 2 \cdot 10^x) = 1 - x.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lg(19 + 2 \cdot 10^x) = 1 - x &\Leftrightarrow 19 + 2 \cdot 10^x = 10^{1-x} \Leftrightarrow 19 + 2 \cdot 10^x = \frac{10}{10^x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot (10^x)^2 + 19 \cdot 10^x - 10 = 0 \Leftrightarrow (10^x)_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361 + 80}}{4} = \frac{-19 \pm 21}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (10^x)_1 = -10, (10^x)_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Уравнение

$$10^x = -10$$

решений не имеет.

Решением уравнения

$$10^x = \frac{1}{2}$$

является число $x = \lg\left(\frac{1}{2}\right) = -\lg 2$.

Ответ: $-\lg 2$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_7(9^x - 25) = \frac{3}{\log_2 7} + \log_7(3^x + 5).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \log_7(9^x - 25) &= \frac{3}{\log_2 7} + \log_7(3^x + 5) \Leftrightarrow \log_7(9^x - 25) = 3\log_7 2 + \log_7(3^x + 5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_7(9^x - 25) = \log_7 8 + \log_7(3^x + 5) \Leftrightarrow \log_7(9^x - 25) = \log_7[8 \cdot (3^x + 5)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9^x - 25 = 8 \cdot (3^x + 5) \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 65 = 0 \Leftrightarrow (3^x)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 260}}{2} = \\ &= \frac{8 \pm 18}{2} \Leftrightarrow (3^x)_1 = -5, (3^x)_2 = 13. \end{aligned}$$

Уравнение

$$3^x = -5$$

решений не имеет.

Решением уравнения

$$3^x = 13$$

является число $x = \log_3 13$.

Ответ: $\log_3 13$.

Пример 10. Решить уравнение

$$1 + \log_7\left(\frac{x-1}{3x-6}\right) = \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{x-2}{7}\right).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
1 + \log_7 \left(\frac{x-1}{3x-6} \right) &= \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{x-2}{7} \right) \Leftrightarrow 1 + \log_7 \left[\frac{x-1}{3(x-2)} \right] = -\log_7 \left(\frac{x-2}{7} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 1 + \log_7 \left[\frac{x-1}{3(x-2)} \right] &= -\log_7 (x-2) + \log_7 7 \Leftrightarrow \log_7 \left[\frac{x-1}{3(x-2)} \right] = -\log_7 (x-2) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \log_7 \left[\frac{x-1}{3(x-2)} \right] &= \log_7 \frac{1}{x-2} \Rightarrow \frac{x-1}{3(x-2)} = \frac{1}{x-2} \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = \frac{3}{x-2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{x-4}{x-2} = 0 \Rightarrow x = 4.
\end{aligned}$$

Проверка показывает, что число $x = 4$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 11. Решить уравнение

$$1 + \log_6 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6} \right) = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{x+1}{3-x} \right).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
1 + \log_6 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6} \right) &= \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{x+1}{3-x} \right) \Leftrightarrow \log_6 6 + \log_6 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6} \right) = -\log_6 \left(\frac{x+1}{3-x} \right) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \log_6 \left[6 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6} \right) \right] &= \log_6 \left(\frac{3-x}{x+1} \right) \Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{3-x}{x+1} \Rightarrow 2x-1 = \frac{3-x}{x+1} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{(2x-1)(x+1) - (3-x)}{x+1} &= 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - x + 2x - 1 - 3 + x}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 2x - 4}{x+1} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1.
\end{aligned}$$

В случае $x = -2$ выражения, стоящие под знаком логарифмов, становятся отрицательными, поэтому это значение должно быть отброшено.

Простая проверка показывает, что число $x = 1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 12. Решить уравнение

$$2 \log_{4x} x^3 = 5 \log_{2x} x.$$

Решение.

$$2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x \Rightarrow 6\log_{4x} x - 5\log_{2x} x = 0 \Rightarrow \frac{6\log_2 x}{\log_2(4x)} - \frac{5\log_2 x}{\log_2(2x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \cdot \left[\frac{6}{\log_2(4x)} - \frac{5}{\log_2(2x)} \right] = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \cup \frac{6}{\log_2(4x)} - \frac{5}{\log_2(2x)} = 0$$

Решением уравнения

$$\log_2 x = 0$$

является число $x = 1$.

Остаётся решить второе уравнение:

$$\frac{6}{\log_2(4x)} - \frac{5}{\log_2(2x)} = 0 \Rightarrow \frac{6}{\log_2(4x)} = \frac{5}{\log_2(2x)} \Rightarrow 6\log_2(2x) = 5\log_2(4x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(\log_2 2 + \log_2 x) = 5(\log_2 4 + \log_2 x) \Rightarrow 6(1 + \log_2 x) = 5(2 + \log_2 x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 6\log_2 x = 10 + 5\log_2 x \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 1; 16.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2$$

Решение.

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow \sqrt{2\log_x(5x)} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2\log_5(5x)}{\log_5 x}} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2\log_5 5 + 2\log_5 x}{\log_5 x}} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2 + 2\log_5 x}{\log_5 x}} \cdot \log_5 x = -2$$

Совершим теперь в полученном уравнении замену переменного

$$\log_5 x = y$$

и заметим, что выполняется неравенство

$$y < 0.$$

В результате уравнение

$$\sqrt{\frac{2 + 2\log_5 x}{\log_5 x}} \cdot \log_5 x = -2$$

примет вид:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2+2y}{y}} \cdot y = -2 &\Rightarrow \frac{2+2y}{y} \cdot y^2 = 4 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow y_1 = -2, y_2 = 1.\end{aligned}$$

В силу того, что $y < 0$, второй случай должен быть отброшен.

В первом случае получаем:

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{25}.$$

Проверка показывает, что найденное значение удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $\frac{1}{25}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $\log_3 x + \log_3 \left(2x + \frac{1}{3}\right) = -1$
2. $\log_5 x + \log_5 \left(x + \frac{4}{5}\right) = -1$
3. $\log_2 x + \log_2 (x + 2) = 3$
4. $\log_{x+1} 4 = 2$
5. $\log_{x-2} 25 = 2$
6. $\log_{x+2} 16 = 2$
7. $2\log_9 (3x - 1) = \log_3 \sqrt{x + 3}$
8. $3\log_8 (x - 2) = \log_2 \sqrt{2x - 1}$

$$9. \log_{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \log_2 \sqrt{2 - \frac{x}{4}} = 0$$

$$10. \log_x 12 - \log_{x^3} 27 = 2$$

$$11. \log_{2x}(1-x) = 2 - \log_{4x^2}\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$12. \log_x 7 + \log_{x^4} 49 = 3$$

$$13. 2\log_{x^2}(4+x) + \log_x 2 = 2$$

$$14. \log_{\sqrt[3]{x}} 2 - \log_x 18 = 2$$

$$15. 2\log_{x^2}(3+x) = 2 + \log_x 2$$

$$16. \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \log_x 5 = 1$$

$$17. 4\log_{\frac{1}{4}} x = 4 - \log_x 64$$

$$18. 2\log_x \frac{1}{7} + \log_7 \left(\frac{1}{x}\right) = -3$$

$$19. -\log_x 64 - 6\log_8 \sqrt{x} = 7$$

$$20. \log_9 x^2 + 5 = \log_x \frac{1}{81}$$

$$21. \log_2 \sqrt{x} - \log_x 4 = \frac{3}{2}$$

$$22. \log_3(11 + 4 \cdot 3^{-x}) = 1 + x$$

$$23. \log_2(25^x - 16) = \frac{1}{\log_7 2} + \log_2(5^x + 4)$$

$$24. \log_5(14 + 24 \cdot 5^x) = 1 - x$$

$$25. \log_5(49^x - 1) - 1 = \frac{1}{\log_2 5} + \log_5(7^x + 1)$$

$$26. \log_7(13 + 2 \cdot 7^{-x}) = 1 + x$$

$$27. \lg(4^x - 9) - \lg 5 = \lg(2^x + 3) + \lg 2$$

$$28. \quad 2\log_5 x - \log_5 \left(x - \frac{3}{2} \right) = 2\log_{25} (2x + 4)$$

$$29. \quad \log_{\frac{1}{10}} \left(-\frac{x}{2} \right) = \lg(1 - x) - 1$$

$$30. \quad \log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 3) = \frac{1}{\log_5 3}$$

$$31. \quad 1 + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{4 - x}{2} \right) = \log_5 (1 - x)$$

$$32. \quad \log_3 (-4 + x) = 2\log_3 4 + \log_{\frac{1}{3}} (2 + x)$$

$$33. \quad \log_2 (x - 1) + \log_2 (4 - x) = 1 + 3\log_8 (3x - 5)$$

$$34. \quad 3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2$$

$$35. \quad 1 + \log_x (3 - x) = \log_7 4 \cdot \log_x 7$$

$$36. \quad (\log_9 (7 - x) + 1) \cdot \log_{3-x} 3 = 1$$

$$37. \quad 1 + \log_x (4 - x) = \log_5 3 \cdot \log_x 5$$

$$38. \quad (\log_4 (2x + 9) + 1) \cdot \log_{x+2} 2 = 1$$