

## Тема урока: «Двугранный угол»

### Цели урока:

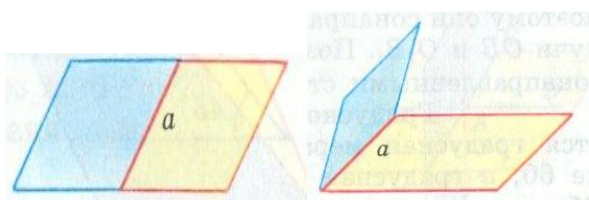
- ввести понятие двугранного угла и его линейного угла;
- рассмотреть задачи на применение этих понятий;
- сформировать конструктивный навык нахождения угла между плоскостями.

**Оборудование:** ноутбук учителя, мультимедиа проектор, презентация.

### Средства обучения:

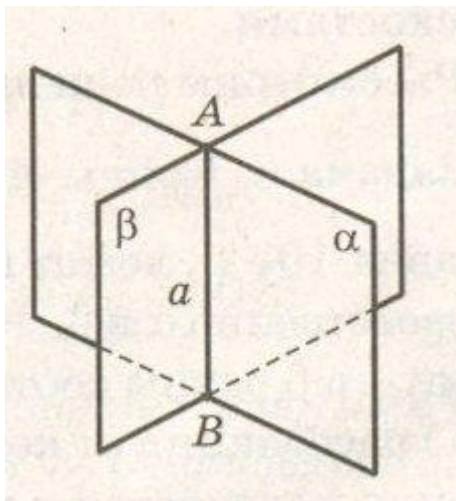
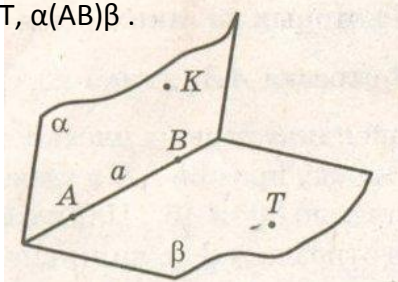
- учебник «Геометрия» (авт. Атанасян Л.С. и др.);
- технологическая карта;

### Ход урока

	Учитель	Предполагаемый ответ ученика
Актуализация знаний	<p>Вопрос:</p> <p>1.«Какую фигуру на плоскости называют углом?»</p> <p>2. «Какие виды углов вы знаете?»</p> <p>3. «Какие еще углы на плоскости вы изучали?»</p>	<p>Углом на плоскости называют фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки.</p> <p>Острый, тупой, прямой, развернутый.</p> <p>Смежные, вертикальные.</p>
	<p>Вопрос: «Давайте вспомним какие углы вы узнали при изучении стереометрии?»</p>	<p>Угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью.</p>
Изучение нового материала	<p>Сделайте предположение: «Какие еще геометрические объекты могут образовывать угол?»</p>	<p>Полуплоскости.</p>
	<p>Вы правы, помимо перечисленных вами углов в стереометрии рассматривают углы между полуплоскостями. Как вы себе представляете такой угол?</p> 	<p>Любая прямая <math>a</math>, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости. Перегнем плоскость по прямой <math>a</math> так, чтобы две полуплоскости с границей <math>a</math> оказались уже не лежащими в одной плоскости. Показывают.</p>
	<p>Такой угол носит название двугранного. Давайте дадим определение двугранного угла.</p> <p><b>Двугранным углом</b> называется фигура, образованная прямой <math>a</math> и двумя полуплоскостями с общей границей <math>a</math>, не принадлежащими одной плоскости.</p> <p>Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его</p>	<p>Записывают и зарисовывают.</p>

**гранями.** У двугранного угла две грани, отсюда и название – двугранный угол. Прямая  $a$  – общая граница полуплоскостей – называется **ребром** двугранного угла.

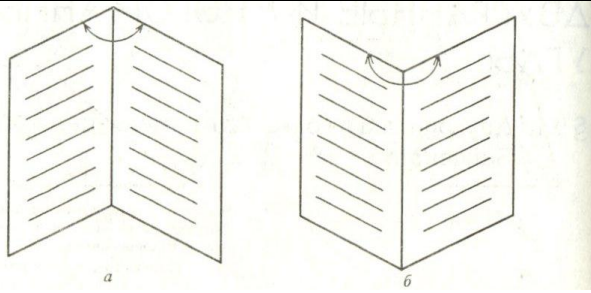
Двугранный угол с гранями  $\alpha$ ,  $\beta$  и ребром  $a$  обозначают  $\alpha\beta$ . Можно использовать и такие обозначения двугранного угла, как  $K(AB)T$ ,  $\alpha(AB)\beta$ .



Также говорят, что двугранный угол  $\alpha\beta$  образован двумя полуплоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , имеющими общую граничную прямую  $a$ .

Двугранный угол может быть как выпуклым, так и невыпуклым.

Как и в планиметрии, множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит соединяющий их отрезок.



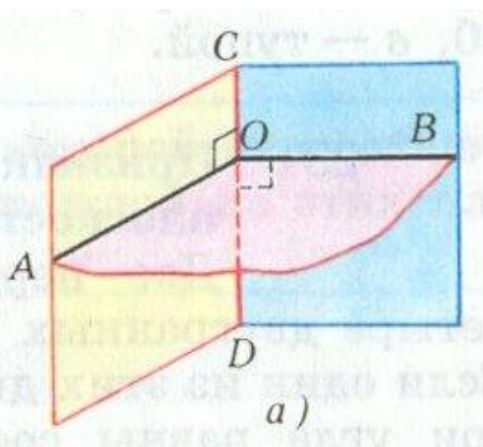
Вопрос: «Где в обыденной жизни мы встречаемся с предметами, имеющими форму двугранного угла?»

Такими предметами являются двускатные крыши зданий, полураскрытая книга, стена комнаты совместно с полом и т. д.

Мы знаем, что углы на плоскости измеряются в градусах. А как измеряются двугранные углы?  
 Пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру, называют линейным углом двугранного угла.  
 Величиной двугранного угла называют величину его линейного угла.  
 Какие вопросы у вас вызывает это определение?

Предположения учащихся. Также весьма вероятно, что ответа может и не быть вовсе.

Обсудим первый вопрос.

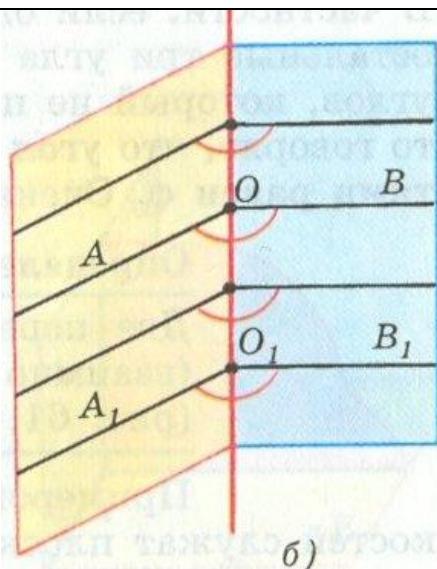


Как построить линейный угол двугранного угла?  
 Корректно ли это определение, т.е. все ли линейные углы одного и того же двугранного угла равны?

Отметим на ребре двугранного угла какую-нибудь точку и в каждой грани из этой точки проведем луч перпендикулярно ребру. Так как  $OA \perp CD$  и  $OB \perp CD$ , то плоскость (AOB) перпендикулярна к прямой CD

Обсудим второй вопрос.

**Теорема.** Величина двугранного угла не зависит от выбора его линейного угла.



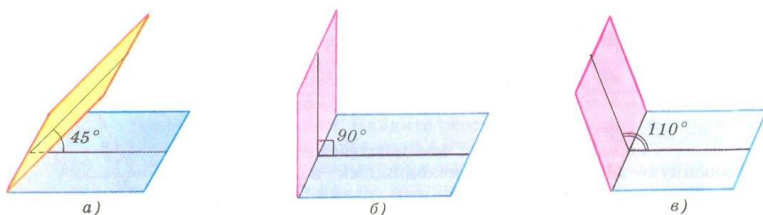
Рассмотрим два линейных угла  $\angle AOB$  и  $\angle A_1O_1B_1$ . Лучи  $OA$  и  $O_1A_1$  лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой  $OO_1$ , поэтому они сонаправлены. Точно также сонаправлены лучи  $OB$  и  $O_1B_1$ . Поэтому  $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$  (как углы с сонаправленными сторонами).

Величина выпуклого двугранного угла, измеренная в градусах, принадлежит промежутку  $(0^\circ, 180^\circ)$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать только выпуклые двугранные углы.

Как вы думаете, зачем в начале урока мы с вами повторяли виды углов?

Да, действительно двугранный угол называется острым, тупым, прямым или развернутым в зависимости от того, каков его линейный угол (соответственно острый, тупой, прямой или развернутый).



Двугранные углы – пространственные аналоги углов на плоскости. Так же, как и на плоскости, определяются вертикальные и смежные двугранные углы, остаются в силе и соответствующие теоремы.

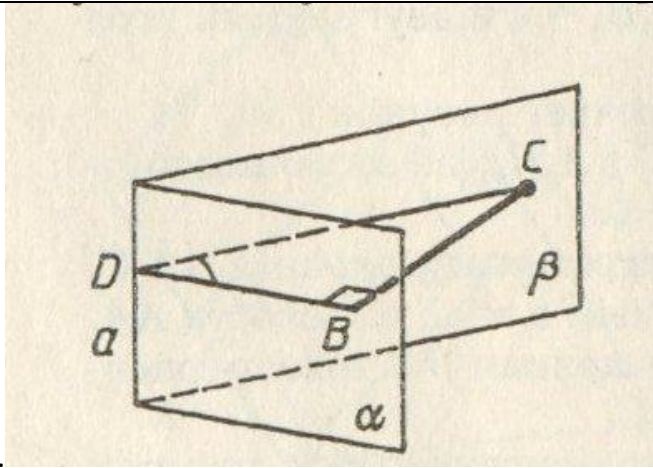
Наверное двугранные углы тоже бывают острыми, тупыми, прямыми или развернутыми.

Первичное закрепление

**Задача.** На грани двугранного угла величиной в  $30^\circ$  дана точка  $C$ , удаленная от ребра на расстояние 8 см. Найдите расстояние от этой точки до другой

Решение

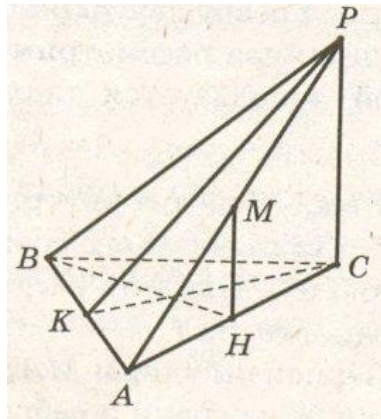
1. Проведем  $CB \perp \alpha$  и  $BD \perp a$ , где  $B \in \alpha$ ,  $D \in a$  ( $a$  – ребро двугранного угла)
  2.  $CD \perp a$  по теореме о трех перпендикулярах.
- Тогда  $\angle BDC$  – линейный угол



грани.

двугранного угла,  $\angle BDC = 30^\circ$ .  
 3.  $\triangle BDC$ -прямоугольный,  
 $BC = CD \times \sin 30^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4$  см.  
 Ответ:  $BC = 4$  см.

**Задача.** Ребро  $PC$  тетраэдра  $PABC$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ ;  $AB = BC = CA = 6$  см,  $BP = 3\sqrt{7}$  см. а) Найдите двугранный угол  $P(AB)C$ . б) Постройте двугранный угол  $P(AC)B$ .



**Решение**  
 а) 1. Пусть  $K$ -середина  $AB$ .  
 $\triangle ABC$ - правильный,  $CK \perp AB$ ,  
 значит  $PK \perp AB$  по теореме о  
 трех перпендикулярах. Тогда  
 $\angle CKP$ -линейный угол  
 двугранного угла  $P(AB)C$ .  
 2.  $\triangle APB$ -равнобедренный.  
 $KP$ -медиана и высота,  
 значит  $\triangle BKP$ -прямоугольный.  
 Из теоремы Пифагора  
 $PK^2 = BP^2 - BK^2$   
 $PK^2 = (3\sqrt{7})^2 - 3^2 = 3\sqrt{6}$  см  
 3.  $\triangle PBC$ -прямоугольный.  
 Из теоремы Пифагора  
 $PC^2 = BP^2 - BC^2$   
 $PC^2 = (3\sqrt{7})^2 - 6^2 = 3\sqrt{3}$  см  
 $CK$ - высота равностороннего  
 $\triangle ABC$ .  
 $CK = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ . Получили  
 $PC = CK$ .  
 Значит  $\triangle PKC$ -  
 прямоугольный  
 равнобедренный, поэтому  
 $\angle CKP = 45^\circ$ . Это означает,  
 что  $\angle P(AB)C = 45^\circ$   
 б) Пусть точка  $H$ -середина  $AC$ .  
 Тогда  $BH$ -медиана  
 правильного  $\triangle ABC$ . По  
 свойству медианы  
 равнобедренного  
 $\triangle$ ,  $BH$  – высота. Значит  $BH \perp$   
 $AC$ .  
 Проведем  $HM \parallel PC$ .

		<p>Так как <math>PC \perp (ABC)</math>, то <math>PC \perp AC</math> (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Значит <math>HM \perp AC</math>. Тогда угол <math>BHM</math>-линейный угол двугранного угла <math>P(AC)B</math></p>
<p><b>Итог урока</b></p>	<p>Верны ли следующие утверждения?  а) пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру, называется линейным углом двугранного угла;  б) каждый двугранный угол ограничен двумя полуплоскостями, называемыми его гранями?  в) величиной двугранного угла называется величина его линейного угла?</p>	
<p><b>Задание на дом</b></p>	<p><b>Задание на дом: (продвинутый уровень)</b>  1. Задача №2(б)  2. Точка <math>M</math> лежит внутри двугранного угла величиной <math>60^\circ</math> и удалена от его граней на расстояния соответственно 3 и 5. Найдите расстояние от точки <math>M</math> до ребра двугранного угла.  3. Найдите информацию и ответьте на вопрос: «Что называется трехгранным углом, его вершиной, ребрами и гранями»</p> <p><b>Задание на дом:</b>  1. Задача №2(б)  2. Двугранный угол равен <math>45^\circ</math>. Точка <math>M</math> лежит в одной грани на расстоянии <math>k</math> от другой грани. Найдите расстояние от точки <math>M</math> до ребра.  3. Найдите информацию и ответьте на вопрос: «Что называется трехгранным углом, его вершиной, ребрами и гранями»</p>	

# Технологическая карта

Тема урока: \_\_\_\_\_

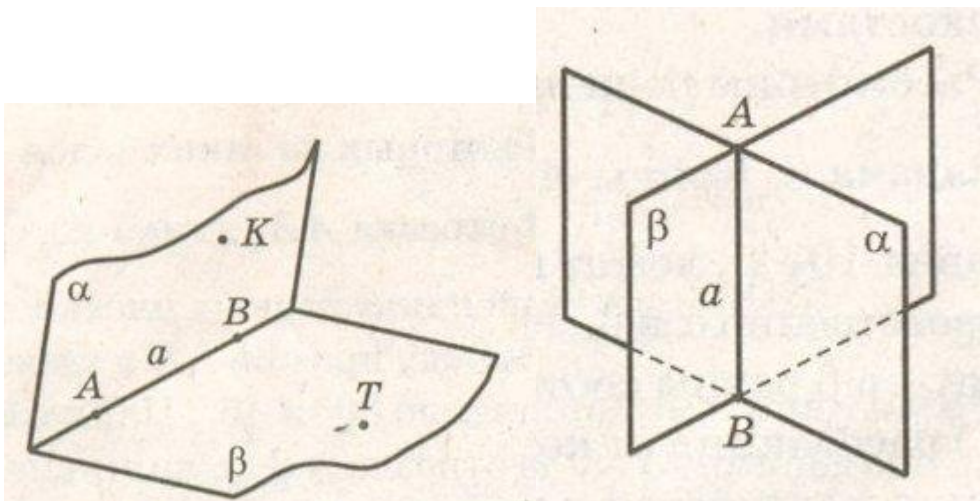
1. Определение. Двугранным углом \_\_\_\_\_

---

---

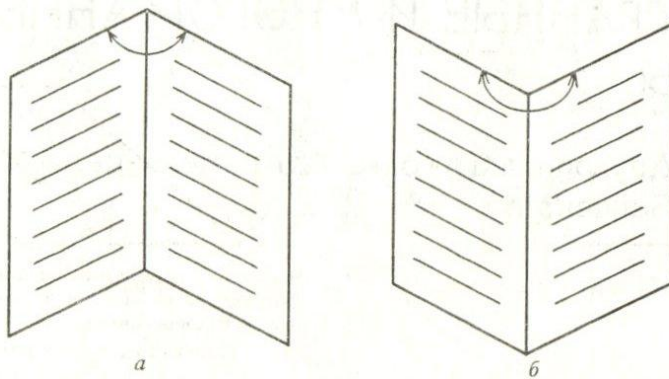
---

2. Обозначение двугранного угла





**3. Выпуклые и невыпуклые двугранные углы.**



**4. Определение.** \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

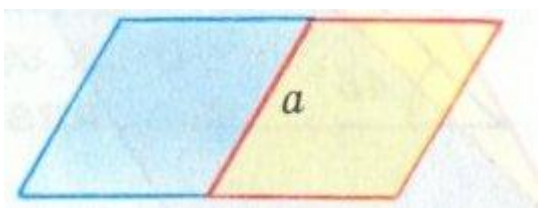
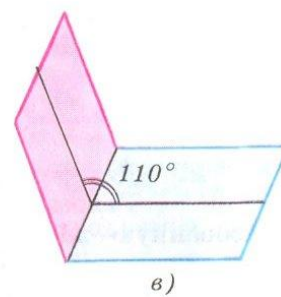
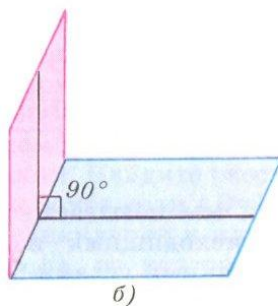
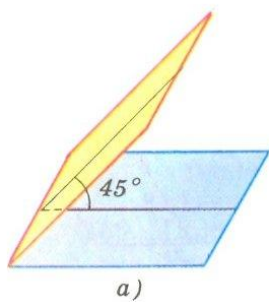
**5. Теорема.** \_\_\_\_\_

---

---



## 6. Виды двугранных углов



## 7. Решение задач.

**Задача1** На грани двугранного угла величиной в  $30^\circ$  дана точка *C*, удаленная от ребра на расстояние 8 см. Найдите расстояние от этой точки до другой грани.

**Решение**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

