**Китаев Дмитрий, Бурмистрова Татьяна.**

**Тема: «Теория кос и узлов»**

краткое содержание

**Диплом 1 степени городской конференции НОУ «Эврика»**

**секция «Прикладная математика»**

 Теория кос и узлов – сравнительно молодой и интенсивно развивающийся раздел математики. Математики впервые заинтересовались косами и узлами лишь в XIX веке и с того времени теория кос и узлов обрела статус самостоятельного раздела математики. Изучением кос и узлов занимались такие великие ученые, как Эмиль Артин (создатель теории кос), Дж. Конвей, Дж. Александер, В. Джонс, В. Тураев, А. Решетихин, Л. Кауфман и другие.

 **Объектом данного исследования** является теория кос и узлов.

 **Гипотеза исследования:** если теорию кос и узлов подвергнуть «алгебратизации», а затем применить к ней законы алгебры, то это позволит решить многие неразрешимые ранее проблемы данной теории.

 **Цель исследования**: обосновать целесообразность «алгебрализации» теории кос и узлов.

Одним из достоинств этой науки является доступность её предметов исследования: достаточно взять любую бечёвку и соединить её концы, получится гладкая замкнутая кривая без самопересечения - узел, а конечный набор замкнутых непересекающихся ориентированных ломаных в прост­ранстве будет *зацеплением*.

 В работе показано, как математические методы, позволяют решать основную проблему теории кос и узлов –проблему классификации, сравнения и распутывания кос и узлов.

Косу представим так: в верхний и нижний край вертикальной плоскости вобьем по *n* гвоздиков (*n*=1,2,3…) – каждый из гвоздиков вертикального основания соединим нитью с одним из гвоздиков нижнего; нити попарно не пересекаются и всё время должны спускаться вниз. Получили косы:**.**К1 — «девичья коса\*; К2- тривиаль­ная коса (аналог 1), К 4— крашеная коса; К5 — циклическая коса. *(*рис.1).

Рис.1  Рис.2

**Косы** с одинаковым числом нитей можно умножать: верх второй косы при­кладывается к низу первой и соответствующие нити склеиваются. (рис.2). Умножение кос обладает следующими **свойствами чисел**:

 для любых трех кос выполняется ассоциативный закон;.

 для косы К верно: 1 . К=К . 1=К ; К-1 . К=К . К-1=1, где коса К-1 - коса, обратная косе К.

Проблему классификации кос можно решать с помощью

 **основных соотношений теории кос:**

1. **Тривиальные соотношения**

 **SjSj- 1 = Sj-1S j = 1 , Sj . 1=1 . Sj=S j (j=1, 2,…, n-1).**

1. **Соотношения далекой коммутативности**

**SiS j =SjSi при i-j** **2 (i,j=1,2,…, n-1).**

**Доказательство.**

Пусть **SiSj = К1, К2 = SjSi при** |i-j|>=2.Получаем, что в обеих косах нить, вышедшая из позиции i, попадает в позицию (i+1), из (i+1) - в i, из j - в (j+1), из (j+1) - в j, так как |i-j|>=2. Если в диаграмме одной из кос нить, выходящая из позиции i, была сверху (снизу) нити, выходящей из позиции (j+1), то и во второй косе будет то же самое, там как нить, перейдя из позиции i в (i+1) (или из j в (j+1)), не может перейти в другую позицию, потому что (i+1) не может равняться j (или (j+1) не может равняться i). Следовательно, К1=К2, что и требовалось доказать.

 **3. Соотношения сплетения SiSi+1Si Si+1 (i=1, 2, …, n-2).**

**Доказательство.**

Любая коса представляется в виде произведения элементарных кос **S1,S2,…,Sn-1** и обратных к ним, например,

 **K1=S1S2-1S1S2-1S1S2-1.** ,  **K3=S2S1S3-1S1-1S3S2-1S1S3S1-1S3-1.**

**Задачи.**

 **1. Докажем, что S1-1\*S2-1\*S1-1 = S2-1\*S1-1\*S2-1.**

**Доказательство.**

 Пусть K1=S1-1\*S2-1\*S1-1, K2=S2-1\*S1-1\*S2-1.

Тогда K1-1=S1\*S2\*S1, K2=S2\*S1\*S2.

 По тождеству 3 K1-1=K2-1. Значит, по тождеству 1 К1=K2, что и требовалось доказать.

 **2. Докажем, что S1\*S2\*S1\*S2-1\*S1-1 = S3\*S1\*S3-1\*S1-1\*S2 .**

**Доказательство.**

S1\*S2\*S1\*S2-1\*S1-1=S3\*S1\*S3-1\*S1-1\*S2; S2\*S1\*S2\*S2-1\*S1-1=S1\*S3\*S3-1\*S1-1\*S2; S2\*S1\*S1-1=S1\*S1-1\*S2; S2=S2, что и требовалось доказать.

 **3. Докажем тривиальность косы К 3.**

**Доказательство.**

**K3=S2(S1S3-1)S1-1S3S2-1S1(S3S1-1)S3-1=S2S3-1(S1S1-1)S3S2-1(S1S1-1)(S3S3-1)=**

**=S2S3-1 . 1 . S3S2-1 . 1 . 1=S2(S3-1S3)S2-1=S2S2-1=1,** что и требовалось доказать.

 **Узел** - замкнутая кривая без самопересечения*,* узел можно описать двумерной диаграммой.

Конечный набор замкнутых непересекающихся ориентированных ломаных в прост­ранстве называется***зацеплением*.**

 Два узла называются ***эквивалентными*,** если узел, сжимая, растягивая, двигая в пространстве (без разрывов и склеек), можно превратить в другой.

Главной проблемой теории узлов является поиск инварианта, препятствующего распутыванию.

**Теорема.**

**Любой узел является замыканием некоторой косы.**

 Возьмём косу, изогнём её дугой и склеим конец с началом, получится узел. Но замыкание разных кос не всегда приводит - к разным узлам. Например, коса из трёх нитей не совпадает с косой из двух нитей, но при замыкании тоже даёт узел "трилистник"(рис.3).

рис.3

 рис.4.

**Теорема Рейдемейстера**

Два узла эквивалентны тогда и только тогда, когда от диаграммы одного узла к диаграмме другого можно перейти с помощью конечного числа двумерных элементарных операций 1,2,3 (рис.4).

Можно ли по любой паре диаграмм узнать, эквивалентны узлы или нет, можно ли их распутать?

 Оказывается можно, для каждого узла и зацепления можно построить соответствующий ему инвариант. Инварианты позволяют не только различать неодинаковые узлы и отличать узлы от незаузленных петель, но и классифицировать косы. По-разному деформированным вариантам одного и того же узла отвечает один и тот же инвариант; узлы, соответствующие разным инвариантам различны. Но два узла с одним и тем же инвариантом необязательно эквивалентны. Если инвариант узла не равен инварианту тривиального узла, то данный узел не может быть тривиальным и его нельзя распутать. Рассмотрим самые известные инварианты и вычислим их для некоторых зацеплений.

**Многочлен Александера**.

Этот многочлен был открыт американским математиком Александером в 1928 году. Он строится в соответствии с числом пересечений каждого вида, имеющихся на диаграмме узла. Например, узлу «трилистник» соответствует многочлен ΔK(t)=t–1–1/t.

**Многочлен Конвея**

 РL (х) - это многочлен от переменной х с целыми коэффициентами.

**Теорема.**

**Для каждого узла или зацепления L полином РL(х) существует и однозначно определяет­ся следующими тремя аксиомами.**

 **Аксиома 1.**

**Эквивалентным диаграммам L и L’ отвечает один и тот же полином: РL(х)=РL’(х).**

**Аксиома 2.**

**Тривиальному узлу отвечает по­лином, равный 1:Ро(х)==1.**

**Аксиома 3.**

 **Трем зацеплениям L+, L-, L°, которые всюду одинаковы, кроме кружочка, где они выгля­дят так, как показано на рисунке 5, отвечают полиномы, связанные соот­ношением**

 **РL+(х)-РL-(х)=х.РL0(х).** 

рис.5

**Теорема.**

**Для распавшегося зацепления РL (х) =О.**

 Вычислим полиномы Конвея для некоторых узлов и зацеплений.

**а) Для двух незацепленных окружностей.**

L+- диаграмма тривиального узла с одной двой­ной точкой, L°- диаграмма двух незацепленных окруж­ностей. Из аксиом I и II следует, что **РL+(х)** = 1.

 Если заменить двойную точку диаграммы L+ на противоположную, а затем двойную точку уничтожить (аксиома III), то мы полу­чим диаграмму тривиального узла L- и пару незацепленных окруж­ностей L°.

По аксиоме III, получим **РL+(х)-РL-(х)=х.РL0(х),** **1—1=х.РL0(х)**, **РL0(х)=0**.

**б) Для двух зацепленных окружностей** (правое зацепление):

 Применяя аксиому III к правой двойной точке, получаем диаграмму **L-**, эквивалентную паре незацепленных окружностей, и тривиальный узел (с одной двойной точкой) **L°.**

 Используя аксиому I и предыдущий подсчет, получаем **РL-(х)=0**.

 Затем по аксиомам I и II получаем **РL0(х)=1**.

Подставляя эти значения в соотноше­ние аксиомы III, получим **РL+(х)=х.** Для левого зацепления полином равен **–х**

**в) Для узла «трилистник»**

РL(х)=1,т.к. распутывается в тривиальный узел.
РL0(х) =- х, т.к. распутывается в левое зацепление двух окружностей, значит, РL (х) = 1 - х2 по аксиоме 3.

**г) Для восьмерки.**

РL (х) = х, так как распутывается в правое зацепление двух окружностей.
РL (х) = 1, так как распутывается в тривиальный узел.

 Поэтому PL’ (x) = 2х по аксиоме 3.

**д) Для проколотой восьмерки** РL (х) = х, так как распутывается в правое зацепление двух окружностей.

Пусть зацепление L1 = L0.Тогда РL1(х)= 1. РL10(х) = х, так как распутывается в правостороннее зацепление двух окружностей.

Значит, РL1 (х) = х2 + 1. В итоге РL (х) = х3+ 2х .

 Даже небольшое число проведенных вычислений показывает, что полином Конвея — достаточно тонкий инстру­мент, позволяющий различать узлы и зацепления и устанавливать их нетри­виальность. Посчитав, например, по­линомы трилистника, восьмерки, и убедившись, что эти полиномы не равны 0 или 1, мы доказали, что их нельзя распу­тать. Разумеется, эти доказательства верны только в том случае, если уже установлен факт существования и единственности полинома Конвея для каждого узла и зацепления.

 **Рассмотрим подкласс невозможных фигур, изучаемый теорией кос и узлов.**

Определим *мультибар* как многогранник, состоящий из набора брусков прямоугольного сечения, составляющих фигуру правильного многоугольника. (рис.6).

 Опишем каждую сторону многогранника как линию косы и применим к ним **основные соотношения теории кос: соотношение далекой коммутативности:** ***ac*** = ***ca*** и **соотношение сплетения: *aba*** = ***bab***. (рис 7)

********

 рис.6 рис 7 рис 8 рис.9

 Четырехэлементные косы, соответствующие трибару, невозможному квадрату и невозможному пентагону имеют вид: **bacbacbac** , **bacbacbacbac**, и **bacbacbacbacbac.**

Замыкание косы преобразует ее в узел (рис.8, рис.9).

Следовательно, **если соединение, соответствующее мультибару, отличается от тривиального четырехэлементного соединения, тогда мультибар является невозможной фигурой.**

У теории кос и узлов серьез­ные приложения к комп­лексному анализу, механике и физи­ке элементарных частиц, обнаружились глубокие связи между этой теорией и абстрактной алгеброй. Здесь оказались заме­шаны не только классические раз­делы физики (статистическая физика, напри­мер модель... льда), но и современная квантовая теория. А идея кодирова­ния химической информации в ма­леньких узелках (и косах!) вновь воз­никла в молекулярной биологии при расшифровке аминокислот и изучении ДНК.