**О формировании вычислительных умений в основной школе**

Вычислять быстро, подчас на ходу — это требование времени. Числа окру­жают нас повсюду, а выполнение арифметических действий над ними приводит к результату, на основании которого мы принимаем то или иное решение. По­нятно, что без вычислений не обойтись как в повседневной жизни, так и во время учебы в школе. Этим, кстати, объясняется столь стремительное развитие удобных калькуляторов. Тем не менее, калькулятор не может обеспечить ответ на все возникающие вопросы. Он не всегда имеется под рукой, а вместе с тем бывает, что во многих случаях достаточно определить лишь примерный ре­зультат.

Многие сопутствующие вычислениям навыки неизбежно требуются и в бы­ту, и в школьной практике. Так, нередко может потребоваться замена числа близким ему (5740  6 тыс.), представление числа в эквивалентной форме (25% — это 0,25, т.е. четверть), сравнение чисел на основе качественных оце­нок.

Однако результаты проверки вычислительных умений учащихся, как пра­вило, не радуют. По данным массовых проверок, проводимых Центром оценки качества образования ИСМО РАО в различных регионах нашей страны, от 20% до 40% шестиклассников ошибаются при вычислении значений числовых вы­ражений (например, таких: 960 • 60; 5706:18; (120+24):(4 • 3)), не могут округ­лять натуральные числа и десятичные дроби, не осиливают вычисления с дробями (например, такие: 10,3 -3 (0,4 + 2,8);  ). Почти 30% семиклассников неправильно определяют наименьшую среди данных дробей (например, среди таких:;0,7; ), ошибаются в вычислениях (например, таких  ; .

Наблюдения на уроках показывают, что учащиеся испытывают трудности в

переводе числовой информации из одной формы в другую ( ; ;  — это примерно 33%;  = 0,00007), редко используют потенциал преобразования числовых выражений (свойства арифметических действий, основное свойство дроби и пр.). Учащиеся недостаточно уверенно владеют вычислитель­ными стратегиями (сочетанием устных, письменных и инструментальных вы­числений), пренебрегают промежуточным контролем и проверкой правдоподо­бия результата. Ошибки в расчетах сбивают с пути, намеченного для достижения результата, а внимание, сосредоточенное на осмыслении хода решения задачи, переноситься на преодоление трудностей, связанных с вычислениями.

Все это говорит о том, как важно в процессе обучения математике в 5—6 классах формировать у учащихся, а в 7-9 классах развивать:

— опыт и сноровку в простых вычислениях наряду с отработкой навыков письменных и инструментальных вычислений, умение выбрать наиболее под­ходящий способ получения результата;

— умение пользоваться приемами проверки и интерпретации ответа;

— предвидение возможностей использования математических знаний для рационализации вычислений.

Нельзя не заметить, что обучение вычислениям вносит свой специфический вклад в развитие основных психических функций учащихся, способствуя раз­витию речи, внимания, памяти. Вычисления — основа для формирования уме­ний пользоваться алгоритмами, логическими рассуждениями.

Развитие вычислительных умений учащихся зависит от содержания соот­ветствующего материала в учебнике, а также от используемых в нем методиче­ских приемов. Остановимся на некоторых особенностях формирования вычис­лительных умений, обеспечивающих эффективность этой работы, которые предусмотрены в учебниках «Математика, 5—6» под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина, «Алгебра,7-9» под ред. Г.В. Дорофеева (М.: Просвещение, 2007 г. и более ранние издания).

Характерной особенностью данного курса является то, что сформированные в 5-6 классах знания и умения активно поддерживаются и развиваются в 7-9 классах. Причем в этом звене акцент сделан на практическую арифметику. Курс насыщен задачами, в которых нужно производить практические расчеты, в него включены задачи с реальными данными. Серьезный импульс развитию вычислительных умений, навыков проведения расчетов дает статистический материал, составляющий значимую часть новой вероятностно-статистической линии. Так, чрезвычайно актуальным становится умение сравнивать и упоря­дочивать величины, находить отношение величин и выражать их в процентах, проводить процентные расчеты.

Раскроем некоторые методические решения, которые реализованы в ука­занном курсе при формировании вычислительных умений.

Остановимся на некоторых примерах обучения алгоритмам выполнения арифметических действий. Как показала практика, они оказались весьма эф­фективными, облегчающими учащимся усвоение традиционно трудных вопро­сов. Приведем примеры.

Особенностью изучения положительных и отрицательных чисел является то, что сложный материал становится доступным и интересным для шести­классников, благодаря его рассмотрению в два прохода. В начале изучения те­мы выделяется фрагмент «Целые числа», охватывающий действия только с целыми числами. Это позволяет на простом материале, с опорой на образы (вы­игрыш-проигрыш, или доход-расход, или какой-либо иной), познакомить учащихся практически со всеми основными понятиями темы, в том числе с правилами знаков при выполнении арифметических действий, уделить специ­альное внимание вычислению длинных сумм целых чисел. Последующее изучение рациональных чисел оказывается уже вторым проходом всех принципи­альных вопросов, что облегчает восприятие материала и способствует прочно­сти приобретаемых навыков.

Другой пример. Как правило, в учебнике показываются разные приемы выполнения одного и того же действия и ученик знает, что он имеет право вы­брать тот из них, который ему понятнее и удобнее.

Так, при изучении трудного вопроса - вычитание смешанных дробей гово­рится, что можно пользоваться общим приемом: смешанные дроби заменить неправильными дробями и дальше действовать по правилу вычитания дробей. Некоторые ученики так и делают. Но далее в учебнике говорится, что вычисле­ния можно упростить, если воспользоваться некоторыми приемами. Показан пример:

Найдем разность чисел и .

Сначала вычтем из  число 3, получим 

Продолжить вычисления можно так. «Займем» единицу в целой части уменьшаемого: . Тогда .

Эту разность можно было бы найти иначе. Поразмыслив, или с помощью учителя, учащиеся догадаются и о другом приеме вычитания:

таком: 

или таком: .

Еще пример. Традиционно при изучении действия *деления десятичных дробей* особый акцент делается на деление «уголком» и соответствующим обра­зом подбирается система упражнений. Ситуация отягощается еще и тем, что практически параллельно с этим ставится вопрос о бесконечной десятичной дроби. В результате учащиеся оказываются абсолютно дезориентированными. И в тех случаях, когда им нужно, например, вычислить частное 6,5 : 0,3 или решить уравнение 3х = 2 приводят приближенный ответ.

Принятые в указанных учебниках методические решения позволяют пре­одолеть традиционные затруднения. Явно показано, что частное десятичных дробей часто нельзя записать в виде десятичной дроби, но его всегда можно найти, перейдя к обыкновенным дробям, например, так: 0,05 : 0,3 = :===.

Показано также, что порой вычислять удобнее, если записать частное в ви­де дроби и преобразовать эту дробь так, чтобы в числителе и знаменателе оказались натуральные числа: 0,05: 0,3= ==.

Теперь учащиеся легко овладеют вычислениями типа: ===.

Внутри числовой линии курса отчетливо выделяется направление, свя­занное с развитием у учащихся *потребности и умения проконтролировать себя.* В связи с этим уже при систематизации знаний учащихся о натураль­ных числах предлагаются специальные серии упражнений, направленных на формирование *приемов беглой проверки результата вычисления.* Например, такие:

1) Найдите приближенное значение произведения, округлив множители до старшего разряда: а)  ; б) 

2) Определите последнюю цифру результата: а) ; б) 

3) Из четырех равенств только одно верное. Найдите его, не выполняя вы­числений.

A. = 22870.

Б. 735 : 35 = 201.

B.4860:45 = 108.

Г. = 852.

Важно уделять достаточное внимание *проверке полученного числового ре­зультата на правдоподобие.* С этой целью в систему текстовых задач включе­ны такие, ответ к которым может быть дан только после соотнесения результа­та с условием. Приведем примеры:

4) Сколько трехлитровых банок понадобится, чтобы перелить весь сок из полного 50-литрового бидона?

5) Для перевязки одной посылки требуется м веревки. Сколько таких посылок можно перевязать, используя клубок, в котором 17 м веревки?

6) Для оклейки комнаты требуется 77,7 м обоев. Сколько рулонов обоев на­до купить, если длина каждого рулона 10,5 м?

Важным элементом вычислительной культуры является умение выполнять *прикидку и оценку результата.* В основе этого умения лежит умение округ­лять числа. Поэтому вопросу округления чисел в курсе уделяется достаточное внимание. Отметим существенный момент: до изучения правила округления натуральных чисел учащимся довольно долго разрешается пользоваться ок­руглением по смыслу (заменой исходного числа другим, близким по смыслу значением). С помощью упражнений закрепляется в сознании учащихся суть употребления основных терминов: «примерно», «приближенное равенство», «округление» и пр.; приведем примеры:

7) В городе во время переписи населения было зарегистрировано 13 882 жи­теля. Сообщая результаты переписи, одна газета указала, что в городе пример­но 13 тыс. жителей, а другая — 14 тыс. Какое сообщение точнее?

8) Миша задумал число и, округлив его до десятков, записал: 280. Какое число мог задумать Миша?

9) В школе 20 классов, в каждом из которых от 30 до 40 учеников. Оцените число учащихся школы. Какое из двух полученных чисел точнее указывает примерное число учащихся в школе, если в школе 758 учеников? 626 учеников?

При изучении темы «Округление десятичных дробей» также *вначале ок­ругление осуществляется по смыслу, а затем* — *по правилу округления.* Уча­щимся предлагаются соответствующие группы упражнений. Среди них — за­дания на прикидку результата. Например, такие:

10) Выразите 1 тыс. секунд приближенно в часах. Какой из следующих от­ветов является лучшим приближением?

А. 2 ч. В. 0,2 ч.

Б. Зч. Г. 0,3 ч.

11) Печенье, цена которого 26 р. за 1 кг, расфасовано в пакеты. На упаков­ках указана их масса: 724 г, 615 г, 830 г. Какую стоимость для каждой упаков­ки, скорее всего, назовет продавец?

Важный класс задач, способствующих развитию вычислительных умений учащихся, базируется на *использовании идеи сравнения.* Например, в ряде случаев используется оценка суммы с опорой на умение *сравнивать компо­ненты действия с некоторыми «рубежными» числами.* Приведем примеры.

Пользуясь оценкой, сравните значение суммы 289 + 655 с 1000.

Докажите, что 

Сравните с числом 10 сумму 2,901+ 2,809 + 2,999.

Естественно, что выполнению таких заданий предшествует формирование умений сравнивать числа. Кроме применения соответствующих правил, уча­щихся желательно учить *сравнению чисел путем рассуждений.* Так, в объяс­нительном тексте учебника при изучении темы «Сравнение дробей» приводится текст-рассуждение для сравнения дробей вида  и , и ,  и ,  и .Заметим, что прием, основанный на сравнении каждой из дробей с

половиной (примененный к последней паре чисел), доступен для учащихся, умеющих бегло сравнивать дробь с половиной. С этой целью желательно не пропускать такие упражнения :

12) Запишите дробь, равную  , меньшую  и большую  , со знаменателем 10; 12;50.

13) Начертите координатную прямую (возьмите единичный отрезок, рав­ный 14 клеткам). Отметьте на координатной прямой все правильные дроби со знаменателем 7 и дробь, . Какие из отмеченных чисел меньше ? Какие из отмеченных чисел больше ?

14) Выпишите дроби, которые больше : ,,,,,.

Обратим внимание на задание, в котором требуется расположить несколько дробей в порядке возрастания, например, таких: ,,и . Учащиеся рассуждают так: рассмотрим пары дробей, которые легко сравнить. Имеем >  и <. Очевидно, что < , поэтому < < < .

В русле использования идеи сравнения учащимся предлагается выполнить творческую работу:

— найдите частное, сравните результат с делимым и сделайте вывод:

а) 3,6: 1,2; 0,55:1,1; 2,4:4,8;

6)3,6:0,12; 0,55:0,11; 2,4:0,48;

— не выполняя вычислений, сравните:

а) 1,95: 1,3 и 1,95;

б) 7,8: 0,4 и 7,8; ...;

— в каждой паре равенств одно неверное; найдите его, не выполняя вычис­лений:

а) 85,75 : 0,7 = 12,25 и 85,75 : 0,7 = 122,5;

б) 33,6 : 1,5 = 22,4 и 33,6 : 1,5 = 224.

Особое значение в линии вычислений занимает *преобразование числовых выражений.* Нужно помочь учащимся постепенно овладеть возможностями использования математических знаний для рационализации вычислений. Планируя ход вычислений, полезно, например, задавать вопросы: *как проще вычислить? нельзя ли выполнить вычисления по-другому? существует ли бо­лее удобный способ вычисления?*

Приведем пример. В учебнике 6 класса рассматриваются так называемые «многоэтажные дроби». При вычислении значения такой дроби учащиеся мо­гут действовать любым удобным для них способом: выполнять вычисления по действиям, записывая каждое из них отдельно, либо ведя запись цепочкой, ли­бо упрощать дробь с помощью основного свойства дроби. Оба способа показаны в объяснительном тексте учебника; проиллюстрируем второй:

Найдем значение дроби . Умножим числитель и знаменатель дроби на 10. Значение дроби при этом не изменится, а в числителе и знаменателе окажутся целые числа. Получим = = = = .

Начиная с 7 класса, вычислительная линия обогащается тем, что учащимся рекомендовано использовать *калькулятор.* Возможность с помощью калькулятора выполнять расчеты быстро и безошибочно позволяет обогатить систему упражнений: включить в нее экспериментальную работу с числами, задания с реальными числовыми данными. Это чрезвычайно важно с точки зрения при­кладного аспекта обучения математике, его практической ориентации.

В курс 7—9 классов включены задачи, при решении которых целесообразно обратиться к калькулятору. При этом желательно не забывать и о возможно­стях устных вычислений, подчеркивать, что, конечно, ответ можно получить с помощью калькулятора, но иногда достаточно устной прикидки для интерпре­тации результата. Хотелось бы, чтобы учащиеся научились видеть, в каких случаях применение калькулятора целесообразно. Приведем два примера :

1. В 1995 г. в России было отправлено  телеграмм, из них 0,5% — международные. Сколько международных телеграмм было отправлено в 1995 г.?

2. В 1981 г. численность населения Земли составляла 4,5 млрд. человек. Примерная численность населения через *х* лет после 1981 г. или за *х* лет до это­го времени может быть рассчитана по формуле Р =. Запишите выражения для вычисления численности населения Земли в 1981 г., 1982 г., 1990 г., 2010 г.. 1975 г., 1970 г. Определите примерную численность населения Земли в 1990 г., 2010 г., 1975., 1970 г.

В решении первого из приведенных примеров калькулятор не потребуется. Вычисления легко выполняются устно с помощью преобразований:

 . Во втором примере калькулятор ну­жен для вычисления степени числа 1,017 и умножения результата на 4,5.

Благодаря применению калькулятора появилась возможность доводить решение любой задачи до числового ответа, чем нередко пренебрегают учителя в целях экономии учебного времени. Это позволило включить в систему уп­ражнений новые учебные задания, в которых по ходу числовых расчетов мож­но было бы *наблюдать за промежуточными результатами, прогнозировать результат.* Приведем пример:

Ученик начальной школы решил в течение декабря, экономя на завтраках, копить деньги к Новому году. Действовать он решил следующим образом: 1 де­кабря положить в копилку 1 к., 2 декабря — 2 к., 3 декабря — 4 к., и т.д., еже­дневно удваивая вкладываемую сумму.

а) Сможет ли он выполнить свое намерение? Сколько рублей ему пришлось бы положить в копилку 31 декабря?

б) Сколько рублей ему придется положить в копилку 31 декабря, если он изменит свой план и будет ежедневно увеличивать вкладываемую сумму на 10 к.?

Это упражнение предложено в теме «Геометрическая прогрессия». Число, соответствующее ежедневно вкладываемой сумме денег, равное n-му члену геометрической прогрессии: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... , можно получить с помощью калькулятора. Уже на 21-ый день сумма равна 1048576 к., т.е. примерно 10 тыс. р., что явно говорит о невозможности выполнить задуманное учеником. А 31 декабря ему пришлось бы положить в копилку 1073741824 к., т.е. при­мерно 10 млн. р.

Другой пример:

В банк внесен вклад в размере 500 р. Выясните, через сколько лет вклад уд­воится, если банк выплачивает 8% годовых; 10%; 16%; 28%.

Учащиеся рассуждают так. При 8% годовых сумма вклада ежегодно увели­чивается в 1,08 раза. С помощью калькулятора будем последовательно выпол­нять операцию умножения 500 (и последующих результатов умножения) на 1,08 и наблюдать за числовыми показаниями на экране, чтобы определить, при которой по счету операции показания удвоятся. При 8% годовых вклад удво­ится через 10 лет; при 10% годовых - через 7 лет; при 16% годовых — через 5 лет; при 28% годовых — через 3 года. Но можно поступить иначе: наблюдать за изменением коэффициента увеличения вклада. Например, при 8% годовых наблюдаем за изменением значения коэффициента  и фиксируем, что оно наиболее близко к числу 2 при

n = 10.