Государственное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования (повышения квалификации) специалистов

**Волгоградская государственная академия повышения квалификации и переподготовки работников образования**

Кафедра теории и методики обучения математике и информатике

Производная в прикладных задачах

Программа элективного курса для обучающихся 10-11 классов

**Составитель:** Нечаева О.В.., учитель математики МОУ гимназии № 4

Волгоград, 2012

**Пояснительная записка**

Элективный курс «Производная в прикладных задачах» рассчитан на учащихся 10-11 классов (профильных или математических).

Рассчитан на 17 часов. При необходимости можно сократить до 9 часов (1 сокращенный вариант) или 10 часов (2 сокращенный вариант). 1 вариант рассчитан на учащихся проявляющих повышенный интерес к математике, 2 вариант – на учащихся, серьезно занимающихся предметом. Система оценивания – зачетная. В конце разделов учащимся предлагаются задачи для самостоятельного решения, а в конце курса учащиеся защищают проект выбранный ими из предложенных тем (не возбраняется, если ученики сами предложат темы проектов).

Применение производной позволяет более эффективно решать многие задачи повышенной сложности, требует от учащихся нетрадиционного мышления. Следует отметить, что знание нестандартных методов и приемов решения задач способствует развитию нового, нешаблонного мышления, которое можно успешно применять также и в других сферах человеческой деятельности (вычислительная техника, экономика, физика, химия и т.д.) Здесь приходится подбирать метод решения задачи, проверять условия его применимости, анализировать полученные результаты. По существу, зачастую проводится небольшое математическое исследование, в процессе которого развиваются логическое мышление, математические способности, повышается математическая культура.

Для многих задач элементарной математики допускается как «элементарное», так и «неэлементарное» решение. Применение производной дает как правило более эффективно решение. Появляется возможность оценить силу, красоту, общность нового математического аппарата.

**Цели курса**:

1) Познакомить учащихся с широтой применения понятия «производная функции».

2) Учить применять производную для решения прикладных задач

3) Обеспечить учащимся условия для успешной поисково - исследовательской деятельности.

**Задачи курса**:

1. Развивать умение мыслить нетрадиционно.
2. Обучать умению проводить математическое исследование.
3. Показать красоту математических выкладок и рассуждений.

**Результат:**

Учащиеся распознают задачи, которые более эффективно решаются с помощью производной, не боятся применять этот математический аппарат при решении уравнений и неравенств и других прикладных задачах.

**Тематическое планирование**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Сфера применения производной в прикладных задачах** | | |
| Сфера применения производной в прикладных задачах | 1 час | Обсуждение, выбор темы проекта |
| Понятие дифференциала. Нахождение приближенных значений функции. | 1 час | Семинар |
| Решение задач на оптимум. | 1 час | Практикум |
| Нахождение периода функции с помощью производной.  Нахождение величины угла между прямыми и кривыми. | 1 час | Семинар |
| Разложение на множители и упрощение выражений.  Вычисление суммы. | 1 час | Практикум |
| **Применение производной в решении неравенств** | | |
| Сравнение чисел с помощью производной | 1 час | Практикум |
| Решение неравенств с помощью производной | 1 час | Практикум |
| Теорема Лагранжа .  Решение неравенств (в том числе при помощи т. Лагранжа) | 2 часа | Семинар |
| **Применение производной при решении уравнений** | | |
| Решение уравнений с помощью производной | 1 час | Семинар |
| Теорема Ролля.  Решение уравнений (в том числе при помощи т. Ролля) | 2 часа | Семинар |
| Применение производной при решении уравнений и неравенств с параметрами | 2 час | Практикум |
| Подготовка к защите проекта | 2 часа | консультации |
| Защита проектно-исследовательской деятельности | 1 час | Защита проекта |

**Тематическое планирование (сокращенное 1 вариант)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Сфера применения производной в прикладных задачах** | | |
| Сфера применения производной в прикладных задачах | 1 час | Обсуждение |
| Понятие дифференциала. Нахождение приближенных значений функции. | 1 час | Семинар |
| Решение задач на оптимум. | 1 час | Практикум |
| **Применение производной в решении неравенств** | | |
| Сравнение чисел с помощью производной | 1 час | Практикум |
| Решение неравенств с помощью производной | 1 час | Практикум |
| **Применение производной при решении уравнений** | | |
| Решение уравнений с помощью производной | 1 час | Семинар |
| Применение производной при решении уравнений и неравенств с параметрами | 1 час | Практикум |
| Подготовка к защите проекта | 1 час | консультации |
| Защита проектно-исследовательской деятельности | 1 час | Защита проекта |

**Тематическое планирование (сокращенное 2 вариант)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Сфера применения производной в прикладных задачах** | | |
| Сфера применения производной в прикладных задачах | 1 час | Обсуждение |
| Нахождение периода функции с помощью производной.  Нахождение величины угла между прямыми и кривыми. | 1 час | Семинар |
| Разложение на множители и упрощение выражений.  Вычисление суммы. | 1 час | Практикум |
| **Применение производной в решении неравенств** | | |
| Решение неравенств с помощью производной | 1 час | Практикум |
| Теорема Лагранжа  Решение неравенств (в том числе при помощи т. Лагранжа) | 1час | Семинар |
| **Применение производной при решении уравнений** | | |
| Решение уравнений с помощью производной | 1 час | Семинар |
| Теорема Ролля  Решение уравнений (в том числе при помощи т. Ролля) | 1 час | Семинар |
| Применение производной при решении уравнений и неравенств с параметрами | 1 час | Практикум |
| Подготовка к защите проекта | 1 час | консультации |
| Защита проектно-исследовательской деятельности | 1 час | Защита проекта |

**Содержание:**

1. ***Сфера применения производной в прикладных задачах***

**1.1 Исторические сведения**

Ряд задач дифференциального исчисления был решен еще в древности. Они встречались у Евклида. Ряд таких задач был решен Архимедом, разработавшим способ проведения касательной, примененный им к спирали, но применимый для других кривых. Основное понятие дифференциального исчисления – понятие производной – возникло в XVII в. В связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики. Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем на основе двух задач: 1) о разыскании касательной к произвольной линии2) о разыскании скорости при произвольном законе движения. Еще раньше понятие производной встречалось в работах итальянского математика Тартальи (около 1500 - 1557 гг.) - здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда. В 17 веке на основе учения Г.Галилея о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах у Декарта, французского математика Роберваля, английского ученого Л. Грегори. Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс.

* 1. **Применение производной в научных дисциплинах**

Производная функции *y* = *f*(*x*) в точке *x*0 выражает скорость изменения функции в точке *x*0, то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью *y* = *f*(*x*). Поскольку функциональные зависимости существуют во многих естественнонаучных и даже социальных дисциплинах, то можно привести солидное множество примеров использования производной. Вот только некоторые из них:

Физические производные величины:

υ(t) = х/(t) – *скорость*

a (t)=υ/ (t) - *ускорение*

*J* (t) = q/(t) - *сила тока*

C(t) = Q/(t) - *теплоемкость*

d(*l*)=m/(*l*) - *линейная плотность*

K (t) = *l*/(t) - *коэффициент линейного расширения*

ω (t)= φ/(t) - *угловая скорость*

а (t)= ω/(t) - *угловое ускорение*

N(t) = A/(t) - *мощность*

Производная в экономических формулах:

П (t) = υ / (t) - *производительность труда,*

*где* υ (t) - *объем продукции*

J(x) = y / (x) - *предельные издержки производства,*

*где* y– *издержки производства в зависимости от объема выпускаемой продукции* x.

* 1. **Перечень математических задач, решаемых при помощи производной:**

-составление уравнения касательной к графику функции;

-нахождение угла между пересекающимися прямыми,

между графиками функций;

-исследование и построение графиков функций;

-решение задач на оптимум;

-преобразование алгебраических выражений;

-разложение многочлена на множители;

-доказательство тождеств;

-вычисление сумм;

-решение уравнений;

-приближенные вычисления и оценка погрешностей;

-доказательство неравенств и тождеств;

-решение систем уравнений;

-решение задач с параметрами;

-отбор кратных корней уравнения;

-сравнение величин;

-определение периода функции;

-нахождение пределов функции с помощью правила Лопиталя;

***Примерные темы для проектно-исследовательской деятельности:***

предложенный выше перечень составляет список тем для проектно-исследовательской деятельности, защита проектов происходит в конце обучения.

1. **Понятие дифференциала. Нахождение приближенных значений функции.**
   1. **Понятие дифференциала**

Пусть дана функция  и - внутренняя точка её области определения. Придадим аргументу приращение  и рассмотрим приращение функции ****

Если это приращение  можно представить в виде **** где величина  не зависит от приращения, а  - бесконечно малая при  величина, имеющая больший порядок малости, чем , то произведение  называется дифференциалом функции  в точке  и обозначается .

**2.2 Нахождение приближенных значений функции**

**Пример 1.**

Найти приращение и дифференциал функции *у(х)=х3 + 2х* в точке *х*=2 при  и при . Найдите абсолютную и относительные погрешности, которые мы допускаем при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение:

****

При х=2 и  имеем

****

Абсолютная погрешность ****

Относительная погрешность  то есть относительная погрешность будет около 4%.

При х=2 и  имеем

****

Абсолютная погрешность  а относительная погрешность  то есть относительная погрешность будет уже около 0,4%.

**Пример 2**

Пользуясь понятием дифференциала функции вычислите приближенно изменение, претерпеваемое функцией  при изменении х от значения 5 к значению 5,01.

Решение.

В данном случае будем считать х=5, а . Изменение функции

****

1. **Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, решение прикладных задач (задач на оптимум)**

**Пример 1**

Требуется построить открытый цилиндрический резервуар вместимостью . Материал имеет толщину d. Какими должны быть размеры резервуара (радиус основания и высота), чтобы расход материала был наименьшим?

Решение.

Радиус основания внутреннего цилиндра обозначим через х, высоту внутреннего цилиндра через h. Объем дна и стенки резервуара

****

С другой стороны, по условию , откуда 

Подставляя в (\*), находим

****

Полученную функцию  нужно исследовать на экстремум при х>0:

****

Единственный положительный корень производной – это точка  Она и дает решение задачи. При этом 

**Пример 2**

Статуя высотой 2 м. стоит на постаменте высотой 3 м. На каком расстоянии от основания постамента должен встать наблюдатель (его рост до уровня глаз равен 1,6 м.), чтобы видеть статую под наибольшим углом? Шириной основания постамента можно пренебречь. (Предложить для самостоятельного решения)

**Задачи для самостоятельного решения**

*Задача Кеплера*.

Вписать в заданный шар цилиндр наибольшего объема. Планиметрический вариант: вписать в заданный круг прямоугольник наибольшей площади.

*Задача Дидоны*.

Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.

*Столько купили земли и дали ей имя Бирса, сколько смогли окружить бычьей шкурой.*

*Задача Тартальи*.

Разделить число восемь на две такие части, чтобы произведение их произведения на их разность было максимальным.

1. **Нахождение периода функции с помощью производной.**

**Нахождение величины угла между прямыми и кривыми.**

* 1. **Нахождение периода функции с помощью производной.**

**Пример 1.**

Является ли периодической функция ****?

Решение

Воспользуемся следующим утверждением: если дифференцируемая в каждой точке числовой прямой функция имеет период Т, то ее производная также имеет период Т.

Предположим, что данная функция  является периодической с периодом Т. Применяя формулу

**,**

получаем

**** где **.**

Имеем

****

Поскольку по предположению функция  имеет период Т, то функция , а следовательно, и функция  также имеют период Т.

Значит, и функция также имеет период Т. Отсюда следует, что существует число , , такое, что Т=. Аналогично показывается, что существует число , такое, что Т=.

Но тогда 

т.е. число  является рациональным, что неверно. Следовательно данная функция НЕ является периодической.

**4.2 Нахождение величины угла между прямыми и кривыми.**

**Пример 2.**

Углом между графиками функций  и  в точке их пересечения называется угол между касательными к их графикам в этой точке**.**

Найти угол между графиками функций  и 

в точке их пересечения (с положительной абсциссой).

Решение.

Абсциссы точек пересечения данных графиков удовлетворяют уравнению

****

И тем самым следующей системе: 

Отсюда находим, что графики функций пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 0 и 2. Найдем тангенсы углов наклона касательных к обоим графикам функций в точке с абсциссой, равной 2. Имеем

****

Отсюда  и  Так как , то уравнения касательных к графикам функций  и  в точке (2;2) соответственно имеют вид

 и  т.е. и 

Следовательно величина угла  между касательными удовлетворяют уравнению

****

и тем самым графики функций  и  в точке с абсциссой х=2 пересекаются под углом, равным 

1. **Разложение на множители и упрощение выражений.**

**Вычисление суммы**

**Пример 1**.

Разложить на множители выражение

.

Решение:

Считая х переменной величиной, рассмотрим функцию .Имеем .Так как , то отсюда заключаем, что **.** Получаем , где С не зависит от х, но зависит от y и z.

Так как последнее равенство верно при любом х, то, полагая, например, в нем х=0 и учитывая, что , найдем .

Таким образом,

****Итак, **=.**

**Пример 2**.

Упростить выражение

****

Решение

Считая х переменной величиной, рассмотрим функцию

****

Тогда, дифференцируя ее, имеем

****Отсюда находим, что , где С не зависит от х, но может зависеть от y и z. Полагая, например, х=0, получаем

**.**

Поскольку , то С=0.

Следовательно, .

**Пример 3**

Найти сумму

****

Решение:

Пусть .

Пусть ****,

, то **.**

Поскольку есть сумма первых  членов геометрической прогрессии со знаменателем х, , то

**.**

Так как , то

****

Возвращаясь к равенству, имеем:

****

***Применение производной в решении неравенств***

**Теоретический материал**

Дифференциальное исчисление широко используется при исследовании функций. С помощью производной можно найти промежутки монотонности функции, ее экстремальные точки, наибольшие и наименьшие значения.

Если функция f имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке некоторого промежутка, то она возрастает (убывает) на этом промежутке. При нахождении промежутков монотонности нужно иметь в виду, что если функция возрастает (убывает) на интервале *(a,b)* и непрерывна в точках *a* и *b,* то она возрастает (убывает) на отрезке *[a,b].*

Если точка *x0*является точкой экстремума для функции *f* и в этой точке существует производная, то *f/(x0)=0.* В точке экстремума функция может не иметь производную. Внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими. Чтобы установить, имеет ли функция в данной критической точке экстремум, пользуются следующими достаточными признаками существования экстремума.

Если функция *f* непрерывна в точке *x0* и существуют такие точки *a, b*, что *f/(x0)>0 (f/(x0)<0 )* на интервале *(a,x0)* и *f/(x0)<0 (f/(x0)>0 )* на интервале *(x0,b),* то точка *x0* является точкой максимума (минимума) функции *f.*

Для отыскания наибольших и наименьших значений *f* на отрезке *[a,b]* достаточно сравнить между собой значения *f* в точках *a, b* и в критических точках из отрезка *[a,b].*

Эти результаты применимы при решении многих элементарных задач, связанных с неравенствами.

Пусть, например, требуется доказать, что на некотором промежутке имеет место неравенство *f(x)≥g(x).* Обозначим *f(x)-g(x)* через *F(x).* С помощью производной *F/(x)* находим наименьшее значение *F* на данном промежутке. Если оно неотрицательно, то во всех точках рассматриваемого промежутка *F(x)≥0*, т.е.

*f(x)≥g(x).*

**ТЕОРЕМА Ролля**.

Если функция f непрерывна на отрезке [a,b], дифференцируема на интервале (a,b) и f(a)=f(b), то существует точка  такая, что .

На геометрическом языке это означает следующее: если , то на графике кривой  найдется точка *с* с координатами , где касательная к графику параллельна оси x.

**ТЕОРЕМА Лагранжа.**

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то существует такая точка , что

.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: при выполнении условий теоремы на интервале (a,b) существует точка *с*, в которой касательная к графику функции в точке (*с*, f(*с*)) параллельна секущей.

1. **Сравнение чисел и доказательство неравенств**

При доказательстве неравенств или для сравнения двух чисел полезно перейти к общему функциональному неравенству.

**Пример 1.**

Сравнить  и .

Решение.

Рассмотрим функцию .

Так как **, **

(показать самостоятельно верность последнего равенства на данном интервале)

То функция  возрастает на интервале .

Таким образом,

**** перемножая получившиеся неравенства и домножая произведение на 180, получаем: <.

**Пример 2**.

Какое из чисел больше:  или ?

Решение.

Рассмотрим функцию  Так как  и  при  то функция  возрастает на множестве всех действительных чисел. Поэтому , т.е. 

1. **Решение неравенств с помощью производной**

**Пример 1**.

Доказать что *(e+x)e-x>(e-x)e+x* для *0<x<e.*

Решение.

Данное неравенство равносильно следующему: *(e-x)ln(e+x)>(e+x)ln(e-x).*

Пусть *f(x)=(e-x)ln(e+x)-(e+x)ln(e-x),*

тогда *f /(x)=-ln(e+x)+(e-x)/(e+x)-ln(e-x)+(e+x)/(e-x).*

Так как *(e-x)/(e+x)+(e+x)/(e-x)=2(e2+x2)/(e2-x2)>2,*

*ln(e+x)+ln(e-x)=ln(e2-x2)<lne2=2,*

то *f/(x)>0* при *0<x<e*. Следовательно, функция *f* возрастает на интервале *(0,e).* Функция *f(0) –* непрерывна. Поэтому эту точку можно включить в промежуток возрастания. Поскольку *f(0)=0*, а *f* возрастает при *0≤x<e,* то *f(x)>0* при *0<x<e.* Отсюда получаем решение задачи.

**Пример 2**.

**.**

Решение

Найдем участки возрастания и убывания функции . Производная  этой функции равна . Так как дискриминант квадратного трехчлена  является отрицательным числом и коэффициент при  этого квадратного трехчлена больше нуля, то для каждого действительного х имеем неравенство .

Таким образом, функция  является непрерывной и возрастающей на всей числовой прямой; поэтому ее график может пересекать ось ОХ только в одной точке. Учитывая, что , заключаем, что решениями данного неравенства являются все числа х из промежутка .

**Пример 3.**

Докажите неравенство (при ).

Доказательство.

При х=0 неравенство справедливо.

Рассмотрим функцию  и найдем ее производную:

 Производная обращается в нуль при 

При  то есть функция монотонно убывает. При  то есть функция монотонно возрастает. При  функция имеет минимум, равный нулю.

Таким образом, при   значит .

**Задачи для самостоятельного решения**:

* Что больше eπ или πe ?
* Доказать, что при  имеет место неравенство 
* Доказать справедливость неравенства

1. **Теорема Лагранжа**

**Теорема Лагранжа**. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то существует такая точка , что

.

Задачи на применение теоремы Лагранжа

**Пример 1.** Доказать неравенство

, (

Доказательство

Рассмотрим функцию и применим для неё теорему Лагранжа на отрезке

1. f непрерывна на отрезке
2. f дифференцируема на отрезке

условия теоремы Лагранжа выполняются, отсюда следует, что существует такая точка , что:

.

Рассмотрим

: по свойствам логарифма .

Производная , подставим : .

Получаем , что , где .

Так как по условию теоремы Лагранжа , отсюда следует неравенство

Учитывая (1) получаем, что (2).

Аналогично при получаем, что

(3)

Из неравенств (2) и (3) следует, что

.

**Пример 2.**

Показать, что разность между синусами двух углов не превышает по абсолютной величине разности между этими углами, взятыми в радиальной мере.

Рассмотрим функцию

Проверим выполнение условий теоремы Лагранжа на отрезке

1. непрерывна на отрезке
2. дифференцируема на отрезке

Выполняются условия теоремы Лагранжа, следовательно, существует такая точка

Найдём производную функции: Подставим

Получаем, что:

Так как может принимать значения только от -1 до 1, то получаем, что:

Так как , получаем, что:

**Задачи для самостоятельного решения**

* Доказать, что для любых действительных x, y: ⏐sin x – sin y⏐≤⏐x–y⏐;

⏐cos x – cos y⏐≤⏐x–y⏐;

x, y [1; +∞): ⏐ – ⏐≤ 0.5⏐x–y⏐.

* Доказать, что для любого x R: ex ≥ 1+x, причем равенство может быть тогда и только тогда, когда x=0.
* Доказать, что для 0<x<π/2 выполняется sin x > (2/π)x.
* Доказать, что при x>0 выполняется cos x >1–(1/2)x2.
* Доказать, что при x>0 выполняется ln x ≤ x-1.

***Применение производной при решении уравнений***

Покажем, как с помощью производной можно решать вопросы существования корней уравнения, а в некоторых случаях и их отыскания. По-прежнему основную роль здесь будут играть исследования функции на монотонность, нахождение ее экстремальных значений. Кроме того, будет использован ряд свойств монотонных и непрерывных функций.

**Свойство 1.** Если функция f возрастает или убывает на некотором промежутке, то на этом промежутке равнение f(x)=0 имеет не более одного корня.

Это утверждение вытекает непосредственно из определения возрастающей и убывающей функций. Корень уравнения f(x)=0 равен абсциссе точки пересечения графика функции y=f(x) с осью x.

**Свойство 2.** Если функция f определена и непрерывна на промежутке [a,b] и на его концах принимает значения разных знаков, то между a и b найдется точка c, в которой f(c )=0.

1. **Решение уравнений с помощью производной**

**Пример 1**.

****

Решение

Переписав данное уравнение в виде, заметим, что его корнями являются абсциссы точек пересечения или касания графиков функций  и .

Для выяснения взаимного расположения графиков этих функций найдем их точки экстремумов.

Так как , то эта функция достигает своего наименьшего значения, ровно 1, в точке х=1. Область существования функции  состоит из всех х таких, что . Так как ****

то  при ,

 при ,

 при .

Так как функция  непрерывна на , то отсюда заключаем, что функция  возрастает на промежутке  и убывает на промежутке . Следовательно, точка х=1 является наибольшим значением функции  на ее области существования.

Таким образом, при любом 

,

.

Следовательно, уравнение имеет один единственный корень х=1.

**Пример 2**.

Решить систему уравнений 

Решение.

Система эквивалентна следующей: 

Из первого уравнения следует, что , из второго . Выразим из первого уравнения x через y: , . Тогда . положив , получим  или . Производная функции f, где , равна . она отрицательна при всех значениях t. Таким образом, функция f убывает. Поэтому уравнение  имеет не более одного корня. Заметим, что  является его корнем. Итак,  единственное решение системы.

**Пример 3**

Решить уравнение 

Решение.

Заметим, что  является корнем уравнения. Докажем, что других корней это уравнение не имеет. Исследуем функцию f, где , на монотонность. Производная . Установим промежутки, на которых функция  сохраняет знак. Для этого исследуем ее на монотонность. Производная . Так как при  , то  при . Следовательно, функция  возрастает при положительных значениях x; . Поэтому  при . В силу четности функции  она принимает положительные значения при всех . Следовательно, f возрастает на всей числовой оси. Согласно свойству 1, уравнение  имеет не более одного корня. Итак,  – единственный корень уравнения.

**Пример 4.** Доказать, что уравнение  имеет единственный корень, лежащий в интервале .

Решение.

Уравнение равносильными преобразованиями приводится к виду , где . Функция f возрастающая, так как  при всех . Согласно свойству 1, уравнение имеет не более одного решения. Функция f непрерывна, кроме того, , . В силу свойства 2 уравнение на интервале  имеет корень.

В задаче 3 требовалось доказать, что корень уравнения принадлежит некоторому промежутку. Мы пользовались свойством 2 непрерывной на отрезке функции, принимающей на концах этого отрезка значения разных знаков. Этот путь не всегда приводит к цели при решении подобных задач. Иногда целесообразно воспользоваться следующим свойством дифференцируемых функций.

1. **Теорема Ролля.**

Если функция f непрерывна на отрезке [a,b], дифференцируема на интервале (a,b) и f(a)=f(b), то существует точка  такая, что .

На геометрическом языке это означает следующее: если , то на графике кривой  найдется точка *с* с координатами , где касательная к графику параллельна оси x.

**Пример 1.**

Доказать, что уравнение  при ,  имеет не более одного действительного корня.

Решение.

Предположим, что уравнение имеет, по крайней мере, два корня  и . Функция f, где  дифференцируема на всей числовой прямой. Так как , то согласно свойству 3, ее производная на интервале  имеет корень. Однако при  уравнение  решений не имеет. Полученное противоречие показывает, что уравнение не может иметь более одного корня.

**Пример 2.**

Решить уравнение .

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде . Функция  непрерывна, возрастающая (как сумма двух возрастающих функций  и ), поэтому она имеет обратную. Найдем ее: , . Итак, обратной для f является функция , совпадающая правой частью уравнения. На основании доказанного выше уравнение эквивалентно уравнению . Ясно, что  является корнем уравнения. Убедимся, что других корней уравнение не имеет.

Пусть . Тогда  положительна как разность между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел  и .Таким образом, функция h возрастает на всей числовой оси. Так как , то h(x)>0 при  и  при , т.е.  - единственный корень уравнения.

**Пример 3**.

Показать, что уравнение не может иметь двух различных корней в интервале (0,1).

Доказательство будем проводить методом от противного.

Рассмотрим функцию

Пусть имеет два различных корня в интервале (0,1). Проверим выполнение условий теоремы Ролля на отрезке [:

1. как многочлен;
2. - корни , то

Условия Теоремы Ролля выполняются, а это значит, что существует такая точка

.

Рассмотрим равенство , оно равносильно .

Точки не принадлежат отрезку [, следовательно и интервалу !!!

Не выполняется заключение теоремы Ролля, а это означает, что функция не может иметь двух различных корней в интервале .

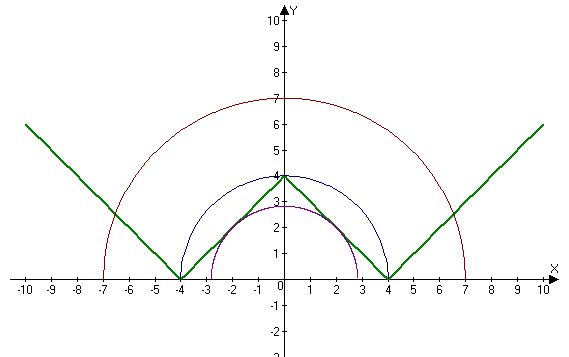
1. **Применение производной при решении уравнений и неравенств с параметрами.**

**Пример 1**

При каких значениях параметра *а* уравнение имеет два решения.

Решение.

Рассмотрим f(x)= и g(x)=. Построим графики данных функций в одной системе координат. Заметим, что функция g(x)= представляет собой множество полуокружностей с центром в начале координат и радиусом *а* .



Очевидно, что при уравнение имеет два решения. Так же два решения дает нам полуокружность, которая внутренним образом касается графика f(x)=. Найдем точки касания. Рассмотрим прямую *у=х+4*, являющейся касательной к полуокружности в некоторой точке *х0< 0*. Поскольку коэффициент k=1, имеем равенство: g´(x0)=1. найдем производную функции g:

g ´(x)=; g´(x0)= =1

Решая получившееся уравнение, найдем х0:

-х0=; х0<0;

;

;

;

.

Подставляя получившееся значение х0 в уравнение функции и касательной получим следующее уравнение относительно *а:*

Ответ:

**Пример 2.**

При каких значениях параметра *а* система

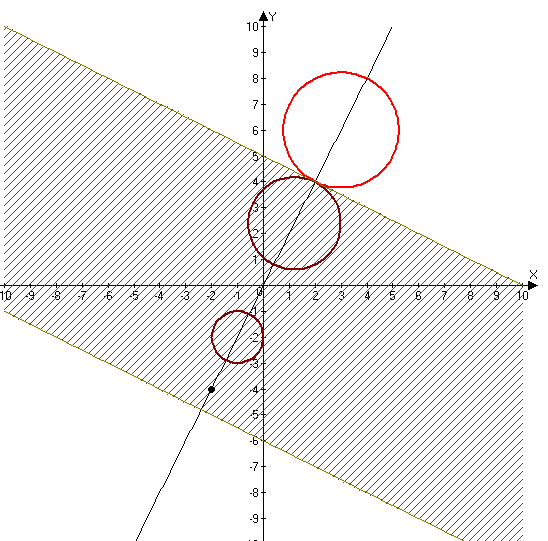
имеет одно решение?

Решение.

Рассмотрим неравенство системы . Раскрывая модуль получим совокупность уравнений двух параллельных прямых: и . решением самого неравенства является область между прямыми.

Рассмотрим уравнение системы . графиком данного уравнения является окружность с центром в точке (а;2а) и радиусом . Нетрудно заметить, что центры всевозможных окружностей удовлетворяющих этим условиям располагаются на прямой у=2х. При а = –2 окружность вырождается в точку с координатами (–2;–4). при а< –2 окружностей не существует. На рисунке, представленном ниже видно, что все окружности, находящиеся внутри полосы дают нашей системе бесконечно много решений. Единственное решение наступает в двух случаях: 1) когда окружность вырождается в точку, 2) когда окружность касается верхней прямой внешним образом. найдем точку касания окружности и прямой . Производная в точке касания х0 равна в нашем случае . Из уравнения окружности выразим переменную

По рисунку видно, что касание происходит в точке принадлежащей нижней полуокружности. Поэтому рассмотрим функцию



Её производная имеет вид: .

.

Имеем: =,

а,

так как то . Подставив х0, в обе функции получим уравнение с переменной *а*: ,

преобразовывая его приходим к уравнению: ,

решая которое, получаем квадратное уравнение: 5а2 – 21а+18=0, корнями которого будут а=3 и а=1,2 – посторонний корень.

Итак, данная система имеет единственное решение при а = –2 и а=3.

Ответ: –2; 3.

**Задачи для самостоятельного решения**:

1. Найдите все значения параметра а, при котором уравнение , имеет единственное решение.
2. Найдите все положительные значения параметра а, при котором уравнение , имеет единственное решение.
3. При каких значениях параметра а уравнение , имеет единственный корень?

**ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Алгебра и начала анализа для 9-10 классов / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986. – 336с.

2. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. – К., Выща школа, 1988. – 120с.

4. Дорофеев Г.М. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики // Математика в школе. – 1980. – №5 – с. 12-21, №6 – с. 24-30.

1. И.А. Марон. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной): учебное пособие – М., 1973. – 400с.
2. Г.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие – М., 1969. – 440с.
3. Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие – М., 1973. – 256с.