Элективный курс для учащихся 10 класса.

**«Приемы решения систем уравнений и неравенств».**

Содержание .

Введение 3с.

I. Уравнения n-ой степени с одним неизвестным 4-5c

Уравнения 3-ей степени 5-6с.

II.Методы решения систем линейных алгебраических 6-8с.

уравнений с несколькими неизвестными

1.Определители второго и третьего порядка.

2. Правило Крамера.

3. Метод Гаусса

III. Системы линейных неравенств 8-13с

(на координатной плоскости)

IV.Нелинейные системы 13-15с

а) однородные

б) симметричные

V.Иррациональные системы 16-17с.

8.Системы из 3-ёх уравнений с тремя неизвестными

9.Задачи на составление систем уравнений 18-20с.

Заключение

Список литературы 21с.

Введение.

Расширенный углубленный вариант базового курса «Решение систем уравнений и неравенств». На уроках алгебры мы рассматриваем решение линейных ,квадратных уравнений с одной переменной, систем линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными способом подстановки и способом почленного сложения. На ЕГЭ предлагаются задания. в которых требуется решить более сложные уравнения- уравнения третьей или четвертой степеней, системы линейных алгебраических уравнений с несколькими неизвестными, нелинейные системы, системы линейных неравенств (на координатной плоскости), иррациональные системы .

В частности к системам уравнений часто сводятся текстовые алгебраические задачи. Этот раздел алгебры считается одним из трудных, т.к. нет единых способов решения систем. Кроме того, системы, вызывают больше затруднений т.к. требуют знаний свойств уравнений, умения выполнять алгебраические преобразования, высокой логической культуры, хорошей техники исследования. И данные темы, рассмотренные на элективных занятиях расширят кругозор учащихся и помогут им в подготовке к ЕГЭ.

Цель курса: Формировать и развивать :

1. интеллектуальные, исследовательские, практические умения при помощи решения систем уравнений и неравенств;
2. умения самостоятельно приобретать и применять знания;
3. творческие способности, умения вести дискуссию.

В процессе курса учащиеся познакомятся с решением систем методом Гаусса, формулой Крамера. Научатся решать уравнения 3-ей степени.

Курс полезен для подготовки к экзаменам, для обучения на 1 курсе учебного заведения.

Курс рассчитан на 20 часов.

Содержание программы:

I. Уравнения n-ой степени с одним неизвестным -3ч.

Уравнения 3-ей степени

II.Методы решения систем линейных алгебраических

уравнений с несколькими неизвестными -4ч.

1.Определители второго и третьего порядка.

2. Правило Крамера.

3. Метод Гаусса

III. Системы линейных неравенств -2ч.

(на координатной плоскости)

IV.Нелинейные системы -4ч

а) однородные

б) симметричные

V.Иррациональные системы -3ч.

VI.Задачи на составление систем уравнений -4ч.

Основные формы работы с учащимися семинар-практикум. По каждой теме ученик сдаёт зачёт по решению каждого типа систем.

**Теоретическая часть.**

I.**Уравнение n-ой степени с одним неизвестным.**

Рассмотрим решение уравнений вида аnxn + an-1xn-1 + an-2xn-2+…+a1x +a0 =0, где все коэффициенты а 0, а1,а2,..аn,( аn ≠ 0) целые числа.

**Теорема.** Если все коэффициенты а 0, а1,а2,..аn,( аn ≠ 0) многочлена

Рn (х) =аnxn + an-1xn-1 + an-2xn-2+…+а1x +a0 =0, целые числа и рациональное число p/q

( p/q -несократимая дробь, p ЄZ, qЄN) является корнем многочлена, то коэффициент а 0 делится на p, а коэффициент аn делится q.

*Док-во*. Пусть рациональное число p/q( p/q -несократимая дробь, p ЄZ, qЄN) является корнем многочлена Рn (х), т.е. справедливо равенство

an∙ pn/qn + an-1∙ pn-1/qn -1 + … + a1∙ p/q + a0 =0.

Умножим это равенство на qn и получим a npn + a n-1p n-1q +…+ a 1pqn-1 + a 0qn=0.

Все слагаемые в левой части этого равенства-целые числа. Их сумма. а также сумма всех слагаемых, кроме последнего, делятся на p, следовательно, последнее слагаемое a 0qn делится на p,но тогда a 0 делится на p, т.к. qn не делится на p и числаp и q не имеют общих делителей, отличных от 1. Сумма всех слагаемых, а также, сумма всех слагаемых, кроме первого, делятся на q, следовательно, первое слагаемое a npn делится на q,но тогда a n делится на q, т. к.pn не делится на q, ч.т.д.

**Следствие**. Пусть коэффициент аn многочлена с целыми коэффициентами

Рn (х) =xn + an-1xn-1 + an-2xn-2+…+а1x +a0 равен 1, тогда если этот многочлен имеет корень, то этот корень -целое число и является делителем свободного члена.

Рассмотрим решение уравнения третьей степени.

1. х3 - 6х2 + 11х – 6 =0

Найдем делители свободного члена: ±1, ±2, ±3, ±6.

Подберем число, при котором многочлен Р(х) = 0.

Р(1) = 1 – 6 + 11 – 6 = 0, т.е. х = 1 является корнем нашего многочлена.

Разделим многочлен на (х – 1).

х3 – 6х2 + 11х х – 1

х3 – х2  х2 – 5х + 6

-5х2 + 11х

-5х2 + 5х

6х – 6 Решим уравнение

6х – 6 х2 – 5х + 6 = 0 => х1 = 2, х2 = 3.

0

Ответ: х1 = 2, х2 = 3.х=1

2. Разложить многочлен х3 + х2 – х – 1 на множители .

Найдем делители свободного члена: ±1.

Подберем число, при котором многочлен Р(х)= х3 + х2 – х – 1 превращается в 0.

Р(1) = 1 + 1 – 1 – 1 = 0. т.е. х = 1 является корнем нашего многочлен.

Разделим Р(х) на (х – 1).

х3 + х2 – х – 1 х – 1

х3 - х2  х2 + 2х + 1

2х2 – х

2х2 – 2х

х – 1

х – 1

0

Решим уравнение х2 + 2х + 1 = 0 => х1,2 = -1.

Итак, х3 + х2 – х – 1 = (х – 1)(х + 1)2

3.Рассмотреть решение уравнения х4 -4х3+12х-9=0

Ответ:, -, 1, 3.

Задания для самостоятельного решения.

Решить уравнение:

1. 3х3 -2 х2 + х – 2 = 0. х = 1.
2. 2х3 + х2 - 5х + 2 = 0. х = -2, х = 1, х = 1/2.
3. 3х3 -2 х2 - 16 х – 15 = 0. х = 3.
4. х3 - 6х2 + 15х - 14 = 0. х = 2.
5. х3 + 5х2 + 8х + 4 = 0. х = -1, х = -2.
6. х3 + 7х2 + 16х + 12 = 0. х = -3, х = -2.
7. х3 - 3х - 2 = 0. х = -1, х = 2.
8. х3 + 3х - 4 = 0. х = 1.
9. х4 -3х3+6х - 4=0 х= 1, 2,,.
10. х5 +3х3 +2х =0 х=0

II. **Системы линейных уравнений и неравенств**.

1.*Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.*

Определители второго порядка. Правило Крамера.

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными: а1х + b1y = c1,

a2x + b2y = c2.

Число Δ назовем определителем системы и обозначим a1 b1

Δ = = a1b2 – a2b1

a2 b2

Обозначим Δх и Δу – вспомогательные определители.

с1 b1 a1 с1

Δх = = с1b2 –с2b1 Δу = = a1с2 – a2с1

с2 b2 a2 с2

Корни системы находятся по формулам: х = , у = .

Определители Δ, Δх, Δу, имеющие две строки и два столбца, называют *определителями второго порядка*.

Формулы х = , у =  выражают **правило Крамера** для нахождения решения системы в том случае, когда Δ ≠ 0.

Рассмотрим решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

1. Решить систему уравнений

3х – 2у = 8,

5х + 7у = 3.

3 -2 8 -2 3 8

Δ = = 21 –(-10)= 31, Δх= = 62, Δу = = -31.

5 7 3 7 5 3

х =  = 2, у =  = -1.

Ответ: (2; -1).

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить определитель:

1). 3 4 2). 2 -3 3). 1 8 4). 0,1 -0,5

-1 2 -5 4 2 0 2 -10

Δ = 10 Δ = - 7 Δ = - 16 Δ = 0.

1. Решить систему уравнений:

1). 3х – 4у = 7, 2). 6х + 7у = 9, 3). 9х – 11у = 1, 4). 3х – 5у = -8,

2х + 5у = -3. 5х – у = -13. 6х – 7у = 2. 7х – 4у = -2.

Ответ:(1,- 1) Ответ:(- 2, 3) Ответ:(5, 4) Ответ:(22/23, 50/23)

4.Доказать, что при любом значении а данная система имеет единственное решение, и найти это решение.

1). 3х + ау = а, 2). ах + 4у = - а,

ах – 2у = а2 + 4. –х + 5ау = 1.

Ответ: (а, - 2). Ответ: (- 1, 0)

5.Найти все значения а и b, при которых система уравнений

а). не имеет решений; б). имеет множество решений; в). имеет единственное решение.

3х – 4у = 12,

9х + ау = b.

Ответ: а) а = - 12, b = 36. б) а = - 12, b ≠ 36. в) а ≠ - 12.

2.*Системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными*.

Определители третьего порядка.

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными.

а1х + b1y + c1z = d1,

a2x + b2y + c2z = d2,

a3x + b3y + c3z = d3.

а1 b1 c1

Δ =a2 b2  c2 = a1 b2 c3 + a2 b3 c1 + a3 c2 b1 – a3 b2 c1 – b3 c2 a1 – a2 b1 c3

a3 b3 c3

Покажем правило вычисления определителя.

а1 b1 c1 а1 b1 c1 а1 b1 c1 а1 b1 c1 а1 b1 c1 а1 b1 с1

a2 b2  c2 a2 b2  c2 a2 b2  c2 a2 b2  c2 a2 b2  c2 a2 b2 с2

a3 b3 c3 a3 b3 c3 a3 b3 c3 a3 b3 c3 a3 b3 c3 a3 b3 с3

а). б). в). г) д). е).

d1 b1 c1 а1 d1 c1 а1 b1 d1

Δх= d2 b2  c2 Δу = a2 d2  c2 Δz = a2 b2  d2

d3 b3 c3 a3 d3 c3 a3 b3 d3

Корни системы находятся по формулам: х = , у = , z =  при Δ ≠ 0.

Изложенный способ решения называют правилом Крамера.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить систему уравнений

2х – у + 3z = 14,

4x + 5y – 2z = -3,

x – 6y + z = 11.

Решение.

2 -1 3 14 -1 3 2 14 3 2 -1 14

Δ =4 5 -2= -95, Δх = -3 5 -2 = -190, Δу = 4 -3 -2 = 95, Δz = 4 5 -3 = -285

1 -6 1 11 -6 1 1 11 1 1 -6 11

х =  = 2, у =  = -1, z =  = 3.

Ответ: (2; -1; 3).

1. Вычислить определитель:

1). 2 3 0 2) 2 1 7 3). 2 3 5 4). 4 8 5 5). 3 -5 8 6). 1 0 -4

-1 4 5 4 2 9 1 2 4 1 -2 -3 4 8 1 3 0 5

3 1 6 6 3 11 3 8 10 5 8 2 1 5 -3 -2 6 1

Δ = 101 Δ = 0 Δ = - 8 Δ = 0 Δ = - 80 Δ = - 102

1. Решить систему уравнений

1). x – 2у + 4z = 5, 2) x – y – z = -8, 3) x – 5y + 3z = - 1, 4) x – y - z = 2.

3x + 4y – z = -1, x + y – z = 4, x – y + z = 1. x – 2у - 3z = 3.

2x + y – 2z = -5. x – y + z = 6.

Ответ: (- 1, 1, 2). Ответ: (5,6,7). Ответ: (2, 0, - 1). Ответ: (0, - 3, 1).

3. *Метод Гаусса.*

Рассмотрим решение системы линейных алгебраических уравнений с несколькими неизвестными с помощью метода Гаусса, который заключается в том, чтобы преобразовать систему к треугольному виду.

1. Решить систему уравнений

1). х1 – 2х2 + х3 – 3х4 = 6, \*-2)\*-5)\*-3). х1 – 2х2 + х3 – 3х4 = 6,

2х1 – 5х2 - 3х3 + х4 = - 11, – х2 - 5х3 + 7х4 = -23, \*2)\*5)

5х1 – 8х2 + 6х3 – 4х4 = 24, 2х2 + х3 + 11х4 = - 6,

3х1 – х2 + х3 + 12х4 = - 4. 5х2 - 2х3 + 21х4 = - 22.

х1 – 2х2 + х3 – 3х4 = 6, х1 – 2х2 + х3 – 3х4 = 6,

– х2 - 5х3 + 7х4 = -23, – х2 - 5х3 + 7х4 = -23,

- 9х3 + 25х4 = - 52, \*-3) - 9х3 + 25х4 = - 52,

- 27х3 + 56х4 = - 137. – 19х4 = 19.

Ответ: х4 = - 1, х3 = 3, х2 = 1, х1 = 2.

Решить системы:

2). 2х1 – 4х2 + х3 – 5х4 = 2, 3). 2х1 – х2 + х3 + х4 = 0,

4х1 – 7х2 - х3 – 8х4 = -5, х1 – 2х2 - х3 – х4 = 3,

10х1 – 18х2 + 2х3 – 23х4 = 3, х1 + х2 - 2х3 + х4 = 5,

2х1 – 3х2 + х3 – х4 = 0. х1 – х2 + х3 + 2х4 = -1.

Ответ: (1, 2, 3, -1). Ответ: (1, 0, - 2, 0).

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить систему уравнений

1). 7/4х – 5/3у = -1, 2). х/5 + 5у/8 = -2,

3/8х – 4/9у = -1. 8х/5 + 7у/4 = 10.

Ответ:(8, 9) Ответ:(15, - 8)

2.Найти все значения а, при которых не имеет решений система уравнений:

1). ах + 3у = а2 + 1, 2). 2ах + у = а2 – 2а,

(3а + 14)х + (а + 8)у = 5а2 + 5. -10х + (а – 6)у = 10а – 5а2.

Ответ: а = - 6. Ответ: а = 5.

3. Решить систему уравнений

4) x + y – z = 4, 5) x - y – z = 2,

x - y + z = 6, x - y – 2z = 1,

x - y – z = - 8. x - 2y – 3z = 3.

Ответ: (5, 6, 7). Ответ: (0, - 3, 1).

6) x + y – z = 4, 7) 2x + y – z = 1,

x - y + z = -2, x - y + 2z = 4,

x - 5y + 5z = 1. 5x + 3y – 4z = 3.

Ответ: Ø . Ответ: Ø .

8) 2х – 4у + z = 3, 9) x – y – 2z = 1,

x – 5y + 3z = -1, x – y – z = 2,

x – y + z = 1. x – 2y – 3z = 3.

Ответ: (2; 0; -1), Ответ: (-1; 1; 2).

10) x – 2y + 3z = 5,

2x – 3y + 4z = 7,

3x – 7y + 11z = 21. Ответ: Ø .4.*Системы линейных неравенств.*

Рассмотрим решение линейных неравенств (на координатной плоскости).

1.Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству.

1). 2у – 3х – 6 < 0.

Решение. Построим график прямой по точкам.

х = 0, у = 3.

у = 0, х = - 2.

у

3

- 2

х

Ответ: множество точек лежащих ниже прямой.

2) 2х + 3 < 0. т.е. х < - 3/2.

Решение. Построим график прямой х = - 3/2.

У

- 3/2 Х

Ответ: множество точек лежащих левее прямой.

3). 3х – 4у – 12 < 0, или 4у – 3х + 12 > 0.

Решение. Построим график прямой по точкам.

х = 0, у = - 3.

у = 0, х = 4.

У

4 х

- 3

Ответ: множество точек лежащих выше прямой.

1. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств.

1) х ≥ 0,

у ≥ 0,

х + у – 2 ≤ 0,

2у – х – 1 ≥ 0.

Решение.

Построим графики прямых по точкам.

у + х – 2 =0 и 2у – х – 1 =0

х = 0, у = 2. х = 0, у = 1/2

у = 0, х = 2. у = 0, х = - 1.

у

2

А

С

0 2 х

В

Ответ: множество точек лежит внутри и на границе треугольника АВС.

2). 0 ≤ х ≤ 1, 0 ≤ у ≤ 2.

Построим графики прямых.

у

2

0 1 х

3). ⎟ х ⎟ < 1, ⎟ у ⎟ < 1.

Построим графики прямых.

у

1

-1 1 х

-1

4). х – 2у ≤ 1,

у – 2х ≥ 1.

Построим графики прямых.

Преобразуем наши неравенства так, чтобы знак перед у был положительным.

1. 2у – х + 1≥ 0 точки лежат выше прямой

2. у – 2х – 1 ≥ 0 точки лежат выше прямой

1. х = 0, у = - 1/2 2.х = 0, у = 1

у = 0, х = 1. у = 0, х = - 1/2

у

1

1 х

В

А

Ответ: точки лежат выше и на сторонах угла АВС.

5). х – 3у < 3,

3х – 2у < 6.

Построим графики прямых.

Преобразуем наши неравенства так, чтобы знак перед у был положительным.

3у – х + 3 > 0, 2у – 3х + 6 > 0.

х = 0, у = - 1. х = 0, у = - 3.

у = 0, х = 3 у = 0, х = 2.

точки лежат выше прямой этих прямых.

у

С

2 3 х

В

-1

А

-3

Ответ: точки лежат выше и на сторонах угла АВС

6). х + у > 2

х – у < 2

х – 3у > -2

Построим графики прямых.

Преобразуем наши неравенства так, чтобы знак перед у был положительным.

а)у + х – 2 > 0, точки лежат выше прямой.

х = 0, у = 2. у = 0, х = 2,

б) у - х + 2 > 0, точки лежат выше прямой

х = 0, у = - 2.

у = 0, х = 2

в)3у - х - 2 < 0, точки лежат ниже прямой.

х = 0, у = 2/3

у = 0, х = -2

У

2 В

А

С

-2 2 х

-2

Ответ: точки лежат внутри треугольника АВС.

Задания для самостоятельного решения:

Найти все решения системы неравенств:

1. х ≤ 0,

у ≥ 0,

2у – х ≤ 6,

2х – у ≤ -2.

Построим графики прямых:

1) х = 0. 2) у = 0. 3)2у – х =6 4)2х - у= -2

х = 0, у = 3. х = 0, у = 2.

у = 0, х = -6. у = 0, х = -1.

Преобразуем наши неравенства так, чтобы знак перед у был положительным.

2у – х – 6 ≤ 0, точки лежат ниже или на прямой.

у – 2х – 2 ≥ 0, точки лежат выше или на прямой.

Ответ: точки лежат внутри построенного четырехугольника .

2. х – у – 2 < 0,

х + 2у – 9 > 0,

х – 2у + 3 > 0.

Решение.

Построим графики прямых:

1) х – у – 2 = 0, 2) х + 2у – 9 = 0 3) х – 2у + 3 = 0.

х = 0, у = -2 х = 0, у = 4,5 х = 0, у = 1,5

у = 0, х = 2. у = 0, х = 9. у = 0, х = -3.

Преобразуем наши неравенства так, чтобы знак перед у был положительным.

у – х + 2 > 0 точки лежат выше прямой.

у + х – 9 > 0 точки лежат выше прямой А

2у – х – 3 < 0 точки лежат ниже прямой

у

3 С

В

-3 2 4 9 х

Ответ: точки лежат внутри треугольника АВС.

III. ***Нелинейные системы уравнений с двумя неизвестными***

1.*Однородные системы*.

Многочлен Р (х, у) называют *однородным многочленом n-ой степени*, если

P(tx.ty) = tnP(x, y).

Например, многочлен Р(х,у) = 2х3 + 3х2у + 4у3 является однородным многочленом третьей степени, Р(х,у) = 2х2 + 3ху + 4у2 является однородным многочленом второй степени.

Система уравнений, состоящая из однородных уравнений, называется *однородной.*

1.Решить систему уравнений.

1). 2х2 + 3ху + у2 = 3, \*5 10х2 + 15ху + 5у2 = 15, сложим полученные уравнения

х2 + 2ху – 5у2 = -5 .\*3 3х2 + 6ху – 15у2 = -15.

13х2 + 21ху – 10у2 = 0

Разделим на у2 (пара х = 0, у = 0 не является решением системы), получим

13 + 21 – 10 = 0,

Пусть  = t, тогда 13t2 + 21t – 10 = 0, откуда t1,2 = -2; 

Значит х1 = -2у, х2 = у.

а) х = -2у. б) х = у

8у2 – 6у2 + у2 = 3 у2 + у2 + у2 = 3

у = ± 1, х = ±2 у2 =  х2 = 

у = , х = 

Ответ: (2,-1), (-2, 1) ,(,  , .

2). х3 – у3 = 7, (х – у)(х2 + ху + у2) = 7,

х2у – ху2 = 2. (х – у)ху = 2.

Разделив одно уравнение на другое, получим  + 1 +  = ,

Пусть  = t, тогда 2t2 - 5t + 2 = 0, откуда t1,2 = 2; 

Значит у = 2х, у = .

а) у = 2х б) у = 

х3 = -1 х3 = 8

х = -1, у = -2. х = 2, у = 1. Ответ: (-1; -2), (2; 1).

2.*Симметрические системы*.

Симметрическими системами называются системы вида f(x,y) = 0,

g(x,y) =0,

где f и g – многочлены, которые не изменяются при замене х на у, а у на х.

Простейшая система этого типа х + у = а,

ху = b.

используя теорему Виета, перейдем к уравнению t2 - аt + b = 0, корни которого являются корнями системы (t1, t2), (t2, t1).

Сделаем замену: 1). х + у = u, xy = v. 2). x2 + у2 = u2 – 2v,

3). x3 + y3 = u3 – 3uv, 4). x4 + y4 = u4 – 4u2v + 2v2,

5). x5 + y5 = u5 – 5u3v + 5uv3.

1.Решить систему уравнений.

1). х + у = 5,

ху = 6.

Решение.

Перейдем к уравнению t2 - 5t + 6 = 0, корни которого t = 2; 3.

Ответ: (2; 3), (3; 2).

2). х4 + х2у2 + у4 = 91,

х2 – ху + у2 = 7.

Решение.

Сделаем замену по формулам и получим

u4 – 4u2v + 3v2 = 91,

u2 = 7 + 3v.

Заменим в первом уравнении u2, получим уравнение

(7 + 3v)2 – 4(7 + 3v)v + 3v2 = 91 или 14v = 42, откуда v = 3, u2 = 16.

Исходная система равносильна совокупности двух систем

1. х + у = 4, 2. х + у = -4, 1. t2 – 4t + 3 = 0, t = 1; 3.

ху = 3. ху = 3. 2. t2 + 4t + 3 = 0, t = -1; -3.

Ответ: (1; 3), (3; 1), (-1; -3), (-3; -1).

Задания для самостоятельного решения.

Решить систему уравнений:

1) х + ху + у = -5,

x2 +xy + y2 = 7.

Решение.

Заменим х + у = u, xy = v.

u + v = -5,

u2 = 7 + v.

Заменим во втором уравнении v, получим уравнение

u2 + u – 2 = 0, u = -2; 1. v = -3; -6.

Исходная система равносильна совокупности двух систем

1). х + у = -2, 2). х + у = 1,

ху = -3. ху = -6.

воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета

1. t2 + 2t – 3 = 0 t = -3; 1.

2. t2 - t – 6 = 0 t = -2; 3.

Ответ: (1; -3), (-3; 1), (-2; 3), (3; -2).

2) (х + у)(х2 – у2) = 200,

х – у = 2.

Решение.

Заменим х + у = t, t2 = 100, t = ±10.

1). х + у = 10, 2). х + у = -10,

х – у = 2. х – у = 2.

х = 6, у = 4. х = -4, у = -6.

Ответ: (6; 4), (4; 6), (-4; -6), (-6; -4).

3) х4 + у2 = 650,

у4 + х2 = 650.

Решение.

Из вида системы следует, что | х | = | у |. Поэтому х4 + х2 = 650.

Введем новую переменную z = x2, где z > 0. Тогда

z2 + z – 650 = 0, z = 25; z = -26.

x2 = 25, х = ± 5, у = ± 5.

Ответ: (5; 5), (5; -5), (-5; 5), (-5; -5).

**3.** *Иррациональные системы с двумя неизвестными*

1. Решить систему уравнений.

,

х + у + ху = 9.

Решение.

Введем новую переменную t =  , где t ≥ 0 , получим 2t2 – 3t – 2 = 0, откуда

t1 = 2; t2 = -1/2- корень посторонний.

 = 2,

х + у + ху = 9.

Ответ: (4; 1), (-9; -9/4).

1. Решить систему уравнений

 +  = 5,

 + х – у = 1

Решение.

Умножим обе части первого уравнения на  - , получим

5х = 5( + ) или  =  - х

Исходная система равносильна

 = 1 + у - х.

 = 1 + у

Сложим эти уравнения и получим

 +  = 2 + 2у – х. или х = 2у – 3. Подставим в систему, получим

 = 4 – у, откуда у2 – 13у + 22 = 0, у = 11; 2, х = 19; 1.

Проверка показывает, что подходит пара (1; 2).

Ответ: (1; 2).

1. Решить систему уравнений

10(х – у) – х4 = 9,

 +  = 

Решение.

Запишем второе уравнение в виде  =  -  и возведем в квадрат, получим

 = х + 1, откуда у = 

Подставим у в первое уравнение системы, получим х4 – 5х2 + 4 = 0, откуда

х = ± 1; ± 2, сделаем проверку и запишем ответ.

Ответ: (1; 2),(-1; 0).

1. Решить систему уравнений

(х – 1)(у – 1) = -8,

(х + 2)(у + 2) = 7.

Решение.

ху – (х + у) = -9,

ху + 2(х + у) = 3.

Вычтем из второго первое, получим 3(х + у) = 12, (х + у) = 4, ху = -5.

t2 – 4t – 5 = 0. t = 5; -1.

Ответ: (5;-1), (-1; 5).

1. Решить систему уравнений

ху – х – у = 14,

х2 + у2 + х + у = 62.

Сделаем замену переменных х + у = u, xy = v, х2 + у2 = u2 – 2v.

v – u = 14. v = u + 14. u = 10; -9.

u2 – 2v + u = 62. u2 – u – 90 = 0. v = 24; 5

Исходная система равносильна совокупности двух систем

х + у = 10, х + у = -9,

xy = 24. xy = 5.

t2 - 10t + 24 = 0, t2 + 9t + 5 = 0,

t = 6; 4. t = 

Ответ: (6; 4), (4; 6), (; ), (; ).

Задачи для самостоятельного решения.

Решить систему уравнений.

1. , 7. х2 + 3у2 = 7,

. ху + у2 = 3.

2. х2 + у2 = 35 + 2(ху – х + у), 8. х2 – ху + у2 = 21,

х2 + у2 = -2ху – 3(х + у) – 2. у2 – 2ху + 15 = 0.

3. , 9. 2у2 – 4ху + 3х2 = 17,

х2 - у2 = 5. у2 – х2 = 16.

4. 5х2 – х + у2 = 4, 10. х2 – у2 = 3,

8х2 – ху + 2у2 = 8. х4 – 3ху + у4 = 23.

5. , 11. (х3 + 1)(у3 + 1) = 18,

ху2 – х2у = 6. ху + х + у = 5.

6. х2у2 – 3у2 + ху + 1 = 0, 12. х3 – у3 = 9,

3х2у2 – 6у2 + ху + 2 = 0. ху = -2.

Решить систему уравнений.

1. , 4. х2 – 3ху + 2у2 = 3,

. 2х2 – 2ху – у2 = -6.

2. х2 + х + ху = 8, 5. х3 – 3х2у = 4х,

у2 + у + ху = 4. у3 – 3ху2 = 4у.

3. х3 – у3 = 19(х – у), 6. х4 + у4 = 17,

х3 + у3 = 7(х + у). ху = 2.

4*. Задачи на составление и решение уравнений*

1. Грузчики А и В работали одинаковое число часов. Если бы А работал на 1 час меньше, а В – на 7 часов меньше, то А заработал бы 72 тыс. руб., а В – 64,8 тыс. руб. Если бы А работал на 7 меньше, а В – на 1 час меньше, то В заработал бы на 32,4 тыс. руб. больше, чем А. Сколько заработал каждый грузчик?

Решение.

Пусть за t часов работы грузчик А заработал х тыс. рублей, а В – у тыс. рублей. Из

условия задачи составляем систему уравнений

(t – 1)  = 72,

(t – 7)  = 64.8

(t – 1)  – (t – 7)  = 32,4.

Из первых двух уравнений системы находим  = ,  = .

Из этих равенств и третьего уравнения системы получим 72 – 64,8 = 32,4

или 20()2 – 9 – 18 = 0. откуда  = .

Разделив второе уравнение системы на первое, получим ,

или , откуда t = 25.

Значит х = 75, у = 90.

Ответ: 75 тыс. руб., 90 тыс. руб.

2. Бак объемом 425 м3 был наполнен водой из двух кранов, причем первый кран был открыт на 5ч, дольше второго. Если бы первый кран был открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй кран был бы открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекло бы вдвое меньше воды, чем из второго. Если открыть оба крана одновременно, то бак наполнится за 17 ч. Определить, сколько времени был открыт второй кран.

Решение.

Пусть х – искомое время, v,u – скорость поступления воды из первого и второго кранов соответственно. Тогда

v(x + 5) + ux = 425,

2vx = u(x + 5),

(v + u)17 = 425.

Из первого и второго уравнения находим v = , u = .

Подставим эти значения в третье уравнение, получим

3х2 – 41х – 60 = 0,

х = 15

Ответ: 15ч.

Задания для самостоятельного решения.

1.Велосипедист отправился с некоторой постоянной скоростью из пункта А в пункт

В , отстоящий от А на75 км, затем он выехал обратно с той же скоростью, но через 2 часа после выезда из В был вынужден остановиться на 45 мин.После этого велосипедист продолжил путь, увеличив скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, что на путь от А до В.

Ответ: 15 км/ч.

2. Два поезда отправились одновременно в одном направлении из городов А и В, расстояние между которыми 60 км., и одновременно прибыли в город С. Если бы один из поездов увеличил скорость на 25 км/ч, а другой – на 20 км/ч, то оба поезда прибыли бы в С одновременно, но на два часа раньше. Найти скорости поездов.

Решение.

Ответ: 50 км/ч., 40 км/ч.

3. Поезд должен был пройти перегон в 120 км по расписанию с постоянной скоростью. Однако, пройдя половину перегона с этой скоростью, поезд остановился на 5 минут. Увеличив на второй половине перегона скорость на 10 км/ч, поезд вовремя прибыл в конечный пункт. Определить скорость поезда по расписанию.

Решение.

Ответ: 80 км/ч.

4. Катер, скорость которого в стоячей воде 15 км/ч, отправился от речного причала вниз по течению реки и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10час до отправления катера. Найдите скорость реки.

Ответ: 3км/ч.

5. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготавливала 8 м3 сверх плана. Поэтому за день до срока было заготовлено 232 м3 древесины. Сколько м3 древесины в день должна была бригада заготавливать по плану?

6. Два каменщика, второй из которых начинает работать на 1,5 дня позже первого. могут выполнить работу за 7 дней. Если бы эту работу выполнял каждый отдельно, то первому потребовалось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней выполнит эту работу второй каменщик?

Ответ:11 дней.

7. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если полученная смесь во втором сосуде содержит на 2 л спирта меньше, чем в первом?

8. Из сосуда, полностью заполненного 12%-ным раствором соли, отлили 1л и налили 1л воды. После этого в сосуде оказался 9%-ный раствор соли. Сколько литров вмещает сосуд?

Ответ: 4л.

Список литературы:

1.А.Г.Мордкович. Алгебра и начала анализа 10-11. В 2-х частях. М. « Мнемозина»

2. С.М.Никольский и др. Алгебра и начала анализа -10. М. «Просвещение»

3. Н.В.Богомолов «Практические занятия по математике».

4. Ф Ф. Лысенко. Математика. «Подготовка к ЕГЭ -2011,2012 « Легион-М»

Ростов –на-Дону.

5.Д.К.Фадеев,И.С.Соминский «Сборник задач по высшей алгебре». 6.Ш.А.Алимов.Алгебра10. М.Просвещение