Олимпиада по математике
10 класс
1 тур

Вариант 1

№1.На координатной плоскости даны три точки: А с координатами (0; 0), В с координатами (1; 1) и С с координатами (3; 2). Каковы должны быть координаты точки D, чтобы точки A, B, C и D образовывали параллелограмм. *(6 баллов)*

№2. Решите в целых числах уравнение:

$$xy = x + y$$

(6 баллов)

№3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ y^2 + xy + x = 5. \end{cases}$$

(6 баллов)

№4. В четырёхугольнике ABCD длина стороны AB равна 12, синус угла BAC равен 0,32, синус угла ADB равен 0,48.
Сумма углов BAD и BCD равна 180^0. Найдите длину стороны BC.

(6 баллов)

Решение заданий

№1. Возможны три разных параллелограмма: ABD_1C, $ABCD_2$, $ACBD_3$.
Чтобы четыре точки образовывали параллелограмм, необходимо и достаточно выполнение одного из равенств:

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD_1}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD_3}$$

где O – произвольная точка (в частности, начало координат). Это следует, например из того, что точка пересечения диагоналей делит диагонали пополам. Решая по очереди выписанные системы линейных уравнений, находим ответы: (4; 3);(2; 1); (-2; -1).

Задачу можно решить и графически.

№2 xy=x+y; xy-x-y=0; xy-x-y+1=1; (x-1)(y-1)=1. Так как x,y$\in Z$, то

$\begin{cases} x-1=1; \\ y-1=1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1=-1; \\ y-1=-1. \end{cases}$ Ответ: (0;0), (2;2).

№3 Преобразуем первое уравнение:

$$x^2-1+xy+y=0,$$
$$(x+1)(x-1)+y(x+1)=(x+1)(x-1+y)=0.$$

Отсюда либо x = - 1, либо x = 1 - y, что при подстановке во второе уравнение даёт либо $y^2-y-1=5,$ либо $y^2+(1-y)y+1-y=5.$
Решая эти уравнения получим (-1; -2), (-1; 3).

№4 Так как сумма противоположных углов одинакова и равна 180^0, то наш четырёхугольник можно вписать в окружность радиуса R. Тогда по теореме синусов $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$, откуда $BC=\dfrac{12\cdot 0.32}{0.48}=8$.
Мы можем применить теорему синусов для разных треугольников, т.к. они вписаны в одну и ту же окружность.
Ответ: 8.

Вариант 2

№1. В оранжерее число пионов относится к числу флоксов как 5 : 4. Четыре цветка сорвали и это отношение стало 7 : 6. Сколько флоксов осталось?

№2. Найдите сумму 2007 первых членов арифметической прогрессии { a_n }, если $a_{2007}+a_{1004}+a_{671}+a_{334}=4$.

№3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy+y^2=0 \\ x^{2011}+y^{2012}=0 \end{cases}$

№4. Сторона AB треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$ на стороне BC взята точка K так, что BK = $9\sqrt{3}$; KC = $16\sqrt{3}$ и $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ KAC. Найдите площадь $\triangle$ KAC.

Ответы и решения

№1. Решение:

Пусть пионов было *5x*, флоксов - *4x*. Пусть сорвали *a* пионов. Приходим к уравнению *(5x-a):(4x-(4-a))=7:6*, откуда получим *2x=13a-28*.
Значения *0,1,2,3* для *a* не подходят. Единственно возможное значение *a=4* приводит к *x=12*.

№2. Решение:

$a_{2007}=a_1+2006d$, $a_{1004}=a_1+1003d$, $a_{671}=a_1+670d$, $a_{334}=a_1+333d$.
В результате сложения получим $4a_1+4012d=4$, откуда $a_1+1003d=1$.

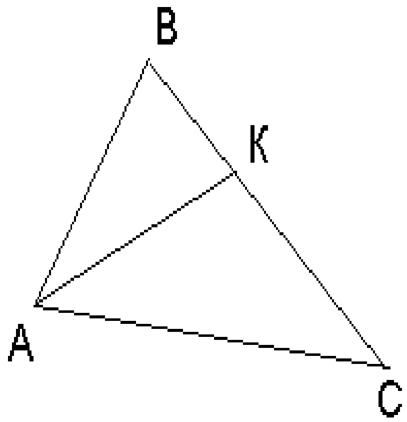
$$S_{2007}=\frac{2a_1+d(2007-1)}{2}n = (a_1+1003d)\cdot 2007=1\cdot 2007=2007 .$$

№3. Решение:

Заметим, что пара (0;0) является решением данной системы уравнений. Пусть теперь $y\neq 0$. Разделим обе части 1-го уравнения на y^2, получим уравнение

$(\frac{x}{y})^2+\frac{x}{y}+1=0$, которое является квадратным относительно $\frac{x}{y}$. Так как его дискриминант равен -3, то оно не имеет действительных корней. Значит система не имеет решения, кроме нулевого.

№4. Решение:



1) Треугольники ABC и KAC подобны, $\frac{AB}{AK}=\frac{AC}{KC}=\frac{BC}{AC}$.

$\frac{AC}{16\sqrt{3}}=\frac{25\sqrt{3}}{AC}$, $AC^2=16\cdot 25\cdot 3$, $AC=20\sqrt{3}$.

2) $\frac{S_{ABC}}{S_{KAC}}=\kappa^2$, $\kappa=\frac{25\sqrt{3}}{20\sqrt{3}}=\frac{5}{4}$.

3) $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{30\sqrt{3}\cdot 15\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 10\sqrt{3}} = 3\cdot 15\cdot 10=450$ *, т.к.*

$p=\frac{15\sqrt{3}+25\sqrt{3}+20\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}$.

4) $\frac{450}{S_{KAC}}=\frac{25}{16}$, $S_{KAC}=288$.