Простейшие уравнения

**Занятие по математике в 11 классе**

**Модульная программа**

**Ход занятия**

I Сообщение темы и постановка цели урока

II Водный инструктаж учителя

 Сегодня вы будете работать с модульной программой, состоящей из 8 учебных элементов. В учебных элементах 1-6 необходимо решить задания открытого банка заданий ЕГЭ по математике соответствующие заданию В7 демонстрационного варианта 2014 года.

 Выполнив задания самостоятельной работы в каждом элементе, вы должны перейти по ссылке, указанной в элементе, и проверить полученные ответы.

 Свои ответы каждый из вас должен сравнить с эталонными и исправить ошибки. Если вы выполнили задания учебного элемента без ошибок, можно переходить к заданиям следующего этапа, но если в каком –то задании допущена ошибка, необходимо выполнить аналогичное задание из другого варианта. При необходимости вы можете обратиться за консультацией к учителю, справочным материалам.

 Выполнив задание, каждый раз необходимо отмечать в листе личных достижений о прохождении этапа, оценив в баллах свой первоначальный результат (каждое задание оценивается в 1 балл) , добавить баллы за дополнительные (корректирующие) задания.

 III Работа с модульной программой

 IV Подведение итогов занятия.

**Модульная программа занятия**

УЭ – 0 – интегрирующая цель

УЭ – 1 линейные, квадратные. кубические уравнения

УЭ – 2 рациональные уравнения

УЭ – 3 иррациональные уравнения

УЭ – 4 показательные уравнения

УЭ – 5 логарифмические уравнения

УЭ – 6 тригонометрические уравнения

УЭ – 7 самооценка и рефлексия.

УЭО Интегрирующая цель.

 В процессе работы над учебными элементами вы должны: повторить алгоритмы решения простейших рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений , подготовиться к выполнению задания В7 ЕГЭ по математике, оценить свой уровень знаний по теме.

**Учебный элемент 1**

Цель: Повторить алгоритмы решения линейных, квадратных, кубических уравнений.

1. **Выполните самостоятельную работу**

 **1 вариант**

Решить уравнения:

1. 
2. Най­ди­те ко­рень урав­не­ния: Если урав­не­ние имеет более од­но­го корня, ука­жи­те мень­ший из них.
3. 
4. 
5. 

[Правильные ответы](#з11)

 **2 вариант**

 Решите уравнения:

1. 
2. Най­ди­те ко­рень урав­не­ния: Если урав­не­ние имеет более од­но­го корня, ука­жи­те мень­ший из них.
3. 
4. 
5. 

[Правильные ответы](#з12)

1. Перейдите по ссылке и сверьте свои ответы с имеющимся ключом. Исправьте ошибки и проставьте заработанные баллы в лист личных достижений.

Если все задания решены правильно, то переходите к следующему учебному элементу. Если же есть ошибки, то решите задания из другого варианта, аналогичные тем, в которых были допущены ошибки, и проставьте набранные баллы в графу «корректирующие задания». В случае затруднений обратитесь к учителю или к справочным материалам.

[Справочные материалы](#з7)

**Учебный элемент 2**

Цель: Закрепить умения решать простейшие рациональные уравнения.

 **Задания для самостоятельной работы:**

 1 вариант 2 вариант

1.  1.
2.  2.  Если урав­не­ние имеет более од­но­го корня, в от­ве­те ука­жи­те боль­ший из них.
3.  3.  Если урав­не­ние имеет более од­но­го корня, в от­ве­те ука­жи­те боль­ший из них.

 [Правильные ответы](#з21) [Правильные ответы](#з22)

Проверьте и оцените свою работу. Исправьте ошибки и проставьте заработанные баллы в лист личных достижений.

Если все задания решены правильно, то переходите к следующему учебному элементу. Если же есть ошибки. , то решите задания из другого варианта, аналогичные тем, в которых были допущены ошибки, и проставьте набранные баллы в графу «корректирующие задания». В случае затруднений обратитесь к учителю или к справочным материалам.

[Справочные материалы](#з8)

**Учебный элемент 3**

Цель: Формировать умение решать иррациональные уравнения,

1. Выполните самостоятельную работу.

**Задания самостоятельной работы**

1 вариант 2 вариант

1.  1) 

2)  2) Если урав­не­ние имеет более од­но­го корня, ука­жи­те мень­ший из них.

 [Правильные ответы](#з31) [Правильные ответы](#з32)

2. Проверьте и оцените свою работу. Исправьте ошибки и проставьте заработанные баллы в лист личных достижений.

Если все задания решены правильно, то переходите к следующему учебному элементу. Если же есть ошибки. , то решите задания из другого варианта, аналогичные тем, в которых были допущены ошибки, и проставьте набранные баллы в графу «корректирующие задания». В случае затруднений обратитесь к учителю или к справочным материалам.

[Справочные материалы](#з9)

**Учебный элемент 4**

 Цель: Формировать умения решать показательные уравнения.

**Решите самостоятельно:**

 1 вариант 2 вариант

 1. 1. 

 2.  2. 

 3.  3. 

 [Правильные ответы](#з41)  [Правильные ответы](#з42)

Проверьте и оцените свою работу. Проверьте и оцените свою работу. Исправьте ошибки и проставьте заработанные баллы в лист личных достижений.

Если все задания решены правильно, то переходите к следующему учебному элементу. Если же есть ошибки. , то решите задания из другого варианта, аналогичные тем, в которых были допущены ошибки, и проставьте набранные баллы в графу и «корректирующие задания». В случае затруднений обратитесь к учителю или к справочным материалам.

[Справочные материалы](#з10)

**Учебный элемент 5**

Цель: Формировать умения решать логарифмические уравнения.

**Решите самостоятельно:**

 1.

2. 

3. 

4. 

5. 

 [Правильные ответы](#з5)

 Проверьте и оцените свою работу, сравнивая полученные ответы с теми, которые есть в ключе. Исправьте ошибки, если они есть. Поставьте баллы в листы личных достижений. В случае затруднений обратитесь к учителю или к справочным материалам.

[Справочные материалы](#зак11)

**Учебный элемент 6**

Цель: Формировать умения решать тригонометрические уравнения.

1. Най­ди­те корни урав­не­ния: В от­ве­те за­пи­ши­те наи­боль­ший от­ри­ца­тель­ный ко­рень.
2. Ре­ши­те урав­не­ние . В от­ве­те на­пи­ши­те наи­боль­ший от­ри­ца­тель­ный ко­рень.
3. Ре­ши­те урав­не­ние . В от­ве­те на­пи­ши­те наи­мень­ший по­ло­жи­тель­ный ко­рень.

 [Правильные ответы](#з6)

Проверьте и оцените свою работу, сравнивая полученные ответы с теми. которые есть в ключе. Исправьте ошибки, если они есть. Поставьте баллы в листы личных достижений. В случае затруднений обратитесь к учителю или к справочным материалам.

[Справочные материалы](#зак12)

**Учебный элемент 7**

Цель: самооценка и рефлексия.

I.**Подсчитайте все полученные баллы.**

**Оцените свой уровень подготовки к выполнению заданий В7 ЕГЭ**:

 -если Вы набрали **19-21 баллов** - отлично, у Вас высокий уровень знаний;

 - если Вы набрали **15-18 баллов** – хорошо, но необходимо потренироваться в решении простейших уравнений, обратив внимание на время выполнения работы;

 -если Вы набрали **11-14 баллов** – у Вас серьезные пробелы в знаниях, необходимо повторить действия с числовыми выражениями, алгоритмы решения основных видов простейших уравнений;

 -если Вы набрали **не более 10 баллов** – у Вас низкий уровень готовности к экзамену. , необходимо срочно рассмотреть еще раз все алгоритмы решения простейших уравнений, правила и организовать самоподготовку поданной теме.

**II. Ответьте на вопросы**:

1. Удалось ли достичь поставленной цели?
2. Как Вы оцениваете свою подготовку по теме «Простейшие уравнения»?
3. Часто ли при самостоятельном решении уравнений приходилось обращаться к:
	1. помощи учителя
	2. справочными материалами?
4. Что помешало набрать оптимальный результат? В чем Вы видите успех сегодняшнего занятия?

 **Ответы к УЭ1**

Вариант 1

1. -9
2. 8
3. -1,5
4. -4
5. 3

[Назад](#у1)

**Ответы к УЭ1**

 Вариант 2

 1) 7

 2) 7

 3) -1

 4) -3

 5) 3

[Назад](#у1)

 **Ответы к УЭ2**

Вариант1

1. 3
2. 1
3. 5

[Назад](#у2)

 **Ответы к УЭ2**

 Вариант 2

 1) 14

 2) -2

 3) 3

[Назад](#у2)

 **Ответы к УЭ3**

Вариант1

1. 55
2. 8

[Назад](#у3)

 **Ответы к УЭ3**

 Вариант 2

 1) 38

 2) -9

[Назад](#у3)

 **Ответы к УЭ4**

Вариант1

1. 4
2. 3
3. 8,75

[Назад](#у4)

**Ответы к УЭ4**

Вариант 2

 1) 10

 2) -8

 3) 4

[Назад](#у4)

 **Ответы к УЭ5**

Вариант1

1. 4
2. 6
3. 2
4. 12
5. 2

[Назад](#у5)

 **Ответы к УЭ6**

Вариант1

1. -124
2. -1
3. 1

[Назад](#у6)

 **Справочные материалы**

**Решение квадратных уравнений. Дискриминант. Формула дискриминанта. Теорема Виета.**

Квадратным уравнением называется уравнение вида

                 ,

где

x - переменная,

a,b,c - постоянные (числовые) коэффициенты.

В **общем случае** решение квадратных уравнений сводится к нахождению дискриминанта:

|  |  |
| --- | --- |
| **Формула дискриминанта:** | Дискриминант, формула дискриминанта. |

       О корнях квадратного уравнения можно судить по знаку дискриминанта (D) :

* D>0 - уравнение имеет 2 различных вещественных корня
* D=0 - уравнение имеет 2 совпадающих вещественных корня
* D<0 - уравнение имеет 2 мнимых корня (для непродвинутых пользователей - корней не имеет)

В общем случае корни уравнения равны:

                 .

Очевидно, в случае с нулевым дискриминантом, оба корня равны

                 .

Если коэффициент при х четный, то имеет смысл вычислять не дискриминант, а четверть дискриминанта:

                

В таком случае корни уравнения вычисляются по формуле:

                

**Теорема Виета.**

Приведенным квадратным уравнением называется уравнение вида

                ,

то есть квадратное уравнение с единичным коэффициентом при старшем члене.

В этом случае целесообразно применять теорему Виета, которая позволяет получить относительно корней уравнения следующую систему уравнений:

                 .

Следует заметить, что любое квадратное уравнение может стать приведенным, если его поделить на коэффициент при старшем члене, то есть при х2.

[Назад](#у1)

**Рациональные уравнения**

**Алгоритм решения рационального уравнения**

Если r(х) — рациональное выражение, то уравнение r(х) = 0 называют рациональным уравнением.

Впрочем, на практике удобнее пользоваться несколько более широким толкованием термина «рациональное уравнение»: это уравнение вида h(x) = q(x), где h(x) и q(x) — рациональные выражения.

Напомним, как мы решали рациональные уравнения раньше, и попробуем сформулировать алгоритм решения.

**Пример 1.** Решить уравнение



Решение. Перепишем уравнение в виде

= 0

При этом, как обычно, мы пользуемся тем, что равенства А = В и А - В = 0 выражают одну и ту же зависимость между А и В. Это и позволило нам перенести член в левую часть уравнения с противоположным знаком.

Выполним преобразования левой части уравнения. Имеем


Вспомним условия равенства [**дроби**](http://school.xvatit.com/index.php?title=%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D1%96_%D0%B4%D0%BE_%D1%83%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%83_%C2%AB%D0%94%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D1%96_%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%BD%D1%96%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%B7%D0%B2%D0%B8%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B8%D1%85_%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B1%D1%96%D0%B2_%D0%B7_%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%BC%D0%B8_%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D0%BC%D0%B8.%C2%BB) нулю: тогда, и только тогда, когда одновременно выполняются два соотношения:

1) числитель дроби равен нулю (а = 0); 2) знаменатель дроби отличен от нуля ).
Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения (1), получим



Осталось проверить выполнение второго указанного выше условия. Соотношение  означает для уравнения (1), что . Значения х1 = 2 и х2 = 0,6 указанным соотношениям удовлетворяют и потому служат корнями уравнения (1), а вместе с тем и корнями заданного уравнения.

Ответ: 2; 0,6.

Если среди [**корней**](http://school.xvatit.com/index.php?title=%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%B8_%D0%B8_%D0%BA%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B8._%D0%A1%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8._%D0%9E%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%80%D0%B5%D0%B7%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8B) числителя окажется число, при котором знаменатель дроби обращается в нуль, то такое число корнем уравнения быть не может, его называют посторонним корнем и в ответ не включают.

Опираясь на решенный пример, сформулируем следующий алгоритм.

**Алгоритм решения рационального уравнения**



[Назад](#у2)

**Иррациональные уравнения**

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называт иррациональными.

Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо эквивалентно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель корня - четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным (опредедение корня с четным показателем степени);

2) если показатель корня - нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

**Пример 1.** Решить уравнение 

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат.
x2 - 3 = 1;
Перенесем -3 из левой части уравнения в правую и выполним приведение подобных слагаемых.
x2 = 4;
Полученное неполное квадратное уравнение имеет два корня  -2 и 2.

Произведем проверку полученных корней, для этого произведем подстановку значений переменной x в исходное уравнение.
Проверка.
При x1 = -2   - истинно:
При x2 = -2  - истинно.
Отсюда  следует, что исходное иррациональное уравнение   имеет два  корня -2 и 2.

**Пример 2.** Решить уравнение .

Это уравнение можно решить по такой же методике как и в первом примере, но мы поступим иначе.

Найдем ОДЗ данного уравнения. Из определения квадратного корня следует, что в данном уравнении одновременно должны выполнятся два условия:

а) x - 9 0;

x 9;

б) 1 - x 0;

-x -1 ;

x 1.

ОДЗ данного уранения: x .

Ответ: корней нет.

[Назад](#у3)

**Показательные уравнения**

Определение

*Простейшее показательное уравнение* — это уравнение вида:

a x = b, где a > 0, a ≠ 1

Такое уравнение не имеет корней при b ≤ 0, а при b > 0 имеет единственный корень: x = log a b. Более сложные показательные уравнения решаются по следующей схеме:

1. Перевести все степени к одинаковому основанию. Желательно, чтобы оно было целым и минимальным. Например, вместо 4x лучше писать 22x, а вместо 0,01x — вообще 10−2x. Почему — узнаете из примеров;
2. В уравнениях, где есть умножение или деление, надо выполнить эти действия. Напомню: при умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются, при делении — вычитаются;
3. Если все сделано правильно, получим уравнение вида a f (x) = a g(x), где a — просто число. Его можно отбросить, поскольку показательная функция монотонна. Получим уравнение f (x) = g(x), которое легко решается.

Помните, что корни — тоже степени, но с дробным основанием:



Задача

Решите уравнение:



Решение

Итак, приведем все степени к основанию 2:

4x = (22)x = 22x; 1 = 20; 256 = 28

Теперь перепишем исходное уравнение и выполним деление:



Получили простейшее показательное уравнение. Отбрасываем основание — получаем:

2x = −8 ⇒ x = −4

Ответ

−4

Задача

Решите уравнение:



Решение

Снова приводим все степени к наименьшему целому основанию:

92x = (32)2x = 34x; 1 = 30; 27 = 33

Обратите внимание: число 27 не является целой степенью девятки. Именно поэтому надо приводить все степени к основанию 3, а не 9. Возвращаемся к исходному уравнению:



Осталось избавиться от основания степени:

4x = −3 ⇒ x = −3/4 = −0,75

Ответ

−0,75

[Назад](#у4)

**Логарифмические уравнения**

*Логарифмические уравнения* — это уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма и (или) в его основании.
Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида **logax = b**,
где **a** и **b** *— данные числа,*
**x** *— неизвестное.*
Уравнение имеет решение, если **a > 0, a ≠ 1**:
**x = ab**

Решение более сложных логарифмических уравнений обычно сводится либо к решению алгебраических уравнений, либо к решению уравнений вида **logax = b**.

**Основные способы решения логарифмов:**

1. равносильные преобразования
2. переход к уравнению-следствию
3. замена переменной
4. разложение на множители

**Примеры решения логарифмических уравнений:**

* **logx (x2 - 3x + 6) = 2**

По определению логарифма, x2 - 3x + 6 = x2,
из чего следует, что x = 2.
Проверка: logx (x2 - 3x + 6) = log2 (22 - 6 + 6) = 2
Ответ: x = 2

* **log7 (3x + 4) = log7 (5x + 8)**

Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем 3x + 4 = 5x + 8, откуда x = -2.
Выполняя проверку, убеждаемся, что при x = -2 левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.
Ответ: корней нет.

## Определение логарифма

|  |
| --- |
|  |
|  |

**Логарифм** **положительного числа**  по основанию (обозначается ) — это показатель [степени](http://www.grandars.ru/student/vysshaya-matematika/stepen.html), в которую надо возвести , чтобы получить . **b > 0**, **a > 0**, **а≠ 1**.

,

Пример:



**Десятичный логарифм** — логарифм с основанием 10, который обозначается как .

, , так как 

**Натуральный логарифм** — логарифм с основанием , обозначается 

## Свойства логарифма

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/4e5d9d261d.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/73e9b67f7d.jpg |  |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/ad79354f73.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/42ee9ba152.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/01386f42c9.jpg |
| http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/a962423e5f.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/23b9af8ed5.jpg | http://www.grandars.ru/images/1/review/id/1684/bdc5e37320.jpg |

#### Основное логарифмическое тождество





#### Логарифм произведения — это сумма логарифмов





#### Логарифм частного — это разность логарифмов





#### Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа 

Показатель степени основания логарифма

, в частности если m = n, мы получаем формулу:, например:

#### Переход к новому основанию

, частности, если c = b, то , и тогда:





[Назад](#у5)

## Решение тригонометрических уравнений.

 К  простейшим  тригонометрическим  уравнениям  относятся   следующие:



где    x  –  неизвестная  величина,   a  –  постоянная   (известное  число).

[Назад](#у1)

Решение простейших тригонометрических уравнений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Уравнение | Общее решение | Частные случаи |
| http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image088.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image090.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image092.gif |
| http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image094.gif, http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image096.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image098.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image100.gif |  http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image102.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image104.gif |
| http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image106.gif, http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image096.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image108.gif |  http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image110.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image112.gif |  http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image114.gif |
| http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image116.gif, http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image118.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image120.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image122.gif |  http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image102.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image124.gif |
| http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image126.gif, http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image118.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image128.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image130.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image112.gif | http://alexlarin.net/Abitur/razdel7.files/image124.gif |