

Задачи группы I.

1. Из вершины A параллелограмма ABCD проведен луч, который пересекает сторону BC в точке P и диагональ BD в точке M. Площадь треугольника ABM равна 10, а площадь треугольника BMP равна 4. Найдите площадь параллелограмма.
2. Найдите площадь параллелограмма MPKH, если сторона MH равна 17, а диагональ MK, равная $8\sqrt{2}$, составляет со стороной KH угол 135° .
3. Площадь треугольника ABC равна 60. Точка C является серединой отрезка AC_1 . Медиана AA_1 треугольника ABC_1 пересекает сторону BC в точке M. Найдите площадь четырехугольника CMA_1C_1 .
4. В равнобедренной трапеции ABCD диагональ перпендикулярна боковой стороне. Высота CH разделила большее основание AD на отрезки AH=12 и DH=3. Найдите площадь трапеции.
5. Дан ромб ABCD с острым углом A. Площадь ромба равна 80, а синус угла A равен 0,8. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину отрезка BM.
6. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса 3, если тангенс угла при основании равен $\frac{3}{\sqrt{7}}$.
7. Трапеция вписана в окружность радиуса 6,5. Ее большее основание является диаметром окружности, если ее средняя линия равна 9.
8. Точка K лежит на стороне BC треугольника ABC, BK=1, KC=15, $\angle BAK = \angle ACK, \angle B = 30^\circ$. Найдите площадь треугольника BAK. #
9. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если одно из оснований в три раза больше другого, а площадь трапеции равна $24\sqrt{3}$. #
10. В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. Определите, в каком отношении диагонали трапеции делятся точкой их пересечения. #
11. Треугольник ABC равносторонний со стороной, равной a. На расстоянии a от вершины A взята точка D. Найдите угол BDC. #
12. Внутри треугольника ABC взята точка D, такая что $\angle ABD = \angle ACD = 45^\circ$. Докажите, что отрезки AD и BC перпендикулярны и равны, если угол BAC равен 45° . #

13. Из произвольной точки М катета ВС прямоугольного треугольника ABC опущен на гипотенузу АВ перпендикуляр МН. Докажите, что $\angle MAN = \angle MCH$. #
14. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ - треугольник ABC, в котором $\angle B = \angle C$, $AC=6$, $BC = 4\sqrt{6}$. На ребре AA_1 отмечена точка О так, что $AO:OA_1=3:5$. Угол между плоскостями ABC и BOC равен 60° . Найдите расстояние между прямыми АВ и B_1C_1 . #
15. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1, боковое ребро $\sqrt{47}$. Найдите синус угла между прямой A_1C и плоскостью боковой грани ABB_1A_1 . #
16. Все грани призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - равные ромбы со стороной 4. Углы $\angle BAD, \angle BAA_1, \angle DAA_1$ равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCD_1 .
17. В шар радиусом $\sqrt{30}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 30° . Найдите объем призмы.
18. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием ABCD. На ребрах AD, A_1B_1 , B_1C_1 лежат соответственно точки L, K, M так, что $AL:AD=2:7$, $A_1K:A_1B_1 = 1:3$, $B_1M:B_1C_1 = 5:7$. Известно, что $A_1K = 2$, $B_1M = 10$, а боковое ребро $AA_1 = 3$. Найдите объем пирамиды с вершиной K и основанием AMC_1L .
19. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ - треугольник ABC, в котором $AC=BC=21$, $AB=12$. Высота призмы равна 26. Вершины B, A, B_1 , и точка K ребра BC лежат на поверхности шара. Найдите радиус этого шара, если $BK:KC=4:3$.

Задачи группы I I.

1. Из вершины С параллелограмма ABCD проведен луч, который пересекает сторону AD в точке Т и диагональ BD в точке Р. Площадь треугольника CDP равна 10, а площадь треугольника DPT равна 8. Найдите площадь параллелограмма.
2. Точка М лежит на стороне CD параллелограмма ABCD так, что $CM:MD=2:3$. Прямая BM пересекает луч AD в точке Т, а площадь треугольника DTM равна 45. Найдите площадь параллелограмма ABCD.
3. Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC, если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 5.
4. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее основания равны 17 и 15, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.
5. Дан ромб ABCD с острым углом В. Площадь ромба равна $12\sqrt{2}$, а синус угла В равен $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Высота CH пересекает диагональ BD в точке К. Найдите длину отрезка СК.
6. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее средняя линия равна 4, а косинус угла между диагональю и основанием равен $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
7. Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию, если острые углы трапеции равны 30° и 45° , а ее средняя линия равна $6 + 3\sqrt{2}$.
8. Точка Н лежит на стороне АО треугольника АОМ, $АН=4$, $ОН=12$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle AMH = \angle AOM$. Найдите площадь треугольника АНМ. #
9. Высоты РА и СВ остроугольного треугольника РСТ пересекаются в точке Н, $\angle CHP = 110^\circ$. Найдите градусную меру угла РСО, если точка О- центр окружности, описанной около треугольника РСТ. #
10. Докажите, что если диагонали трапеции перпендикулярны, то сумма квадратов их длин равна квадрату суммы длин оснований. #
11. Высота, биссектриса и медиана треугольника, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найдите углы треугольника. #
12. В треугольнике ABC проведены медиана BM и биссектриса BK, высота AD. Найдите сторону AC, если прямые BM и BK делят высоту AD на три равные части, а длина стороны $AB=4\sqrt{13}$. #

13. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP, BQ, CR. Докажите, что $\angle BAP = \angle BQR$.#
14. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ - треугольник ABC, в котором $AC=BC$, $AB=12$. На ребре CC_1 отмечена точка K так, что $CK:KC_1=1:2$. Найдите синус угла между плоскостями ABC и ABK, если $AK=10$, а расстояние между прямыми AC и B_1C_1 равно 12.#
15. Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60° . Секущая плоскость параллельна стороне основания и содержит высоту пирамиды. Найдите площадь сечения.#
16. Все грани призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ - равные ромбы. Углы $\angle BAD, \angle BAA_1, \angle DAA_1$ равны 60° каждый. Найдите площадь полной поверхности призмы, если расстояние от точки A_1 до плоскости BDB_1 равно $\sqrt{2}$
17. В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 4,5. Прямая BA_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 45° . Найдите площадь поверхности шара.
18. Ребра AB и AD основания ABCD прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 3 и 6. На боковых ребрах AA_1, BB_1 равных 9 лежат соответственно точки M и P так, что $AM:MA_1=1:4$, $B_1P:PB_1=2:7$. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1 .
19. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ - треугольник ABC, в котором $AC=BC=21$, $AB=12$. Высота призмы равна 26. Вершины B, A, B_1 и точка K ребра BC лежат на поверхности шара. Найдите радиус этого шара, если $BK:KC=4:3$.