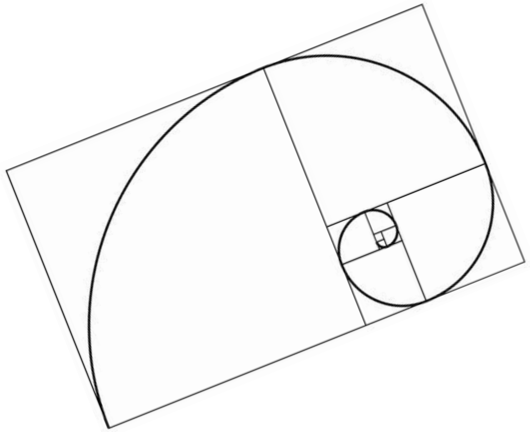
Государственное бюджетное образовательное учреждение средняя образовательная школа № 349 с углубленным изучением английского языка



"Геометрические миниатюры"

"Для несведущих в математике

сокрыты многие тайны вещей".

Я. Коменский

Санкт – Петербург 2014

Список литературы

1. Клауди Альсина «Секта чисел. Теорема Пифагора»; М-2014г.
2. Фернандо Корбалан «Золотое сечение. Математический язык красоты»; М-2013г.
3. Энрике Грасиан «Простые числа. Долгая дорога к бесконечности»; М-2014г.
4. Л.Ф. Пичурин «За страницами учебника алгебры».

Содержание

Пояснительная записка

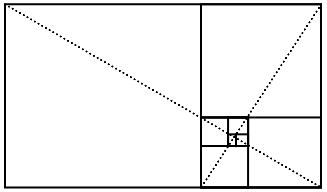
Сборник содержит систематически подобранные задачи и упражнения к основным разделам курса для обучающихся 7-10 классов, содержащий задачи по геометрии, в которых отражены жизненные ситуации, позволяющие в будущем успешно адаптироваться и социализироваться обучающимся в современном обществе и уметь применять математические знания в любой жизненной ситуации. Способствует развитию учебной, коммуникативной и социальной компетенций обучающихся. Формирует у обучающихся умение переноса математических знаний в новую ситуацию, развивает умение работать самостоятельно и в группе. Текстовые задачи сборника - отличный тренажер при подготовке к математическим олимпиадам.

Технология внедрения инновационного продукта, возможные сложности при использовании инновационного продукта и пути их преодоления: сборник предназначен для учителей математики общеобразовательных школ, а также школ с углубленным изучением математики. Сложность заключается в дефиците времени на уроках для решения нестандартных задач, поэтому может использоваться во внеурочной деятельности и для подготовки обучающихся к олимпиадам по математике.

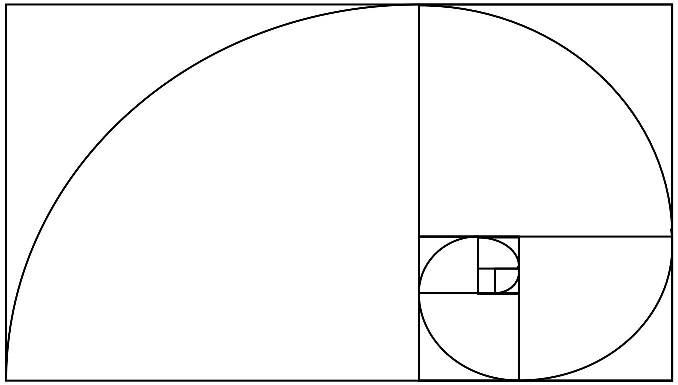
Интересные факты. Наличные или карта?

Большинство банковских и визитных карточек, парковочные талоны и даже телеэкраны формата 16:9 содержат золотое сечение. Это можно проверить, не проводя измерения и математические расчеты. Достаточно взять две банковские карты одного и того же размера и расположить одну карту горизонтально, а другую – вертикально, выровняв их по нижней стороне. Затем достаточно проверить, проходит ли продолжение горизонтальной карты через правый верхний угол вертикальной карты.

Спирали и золотое сечение.



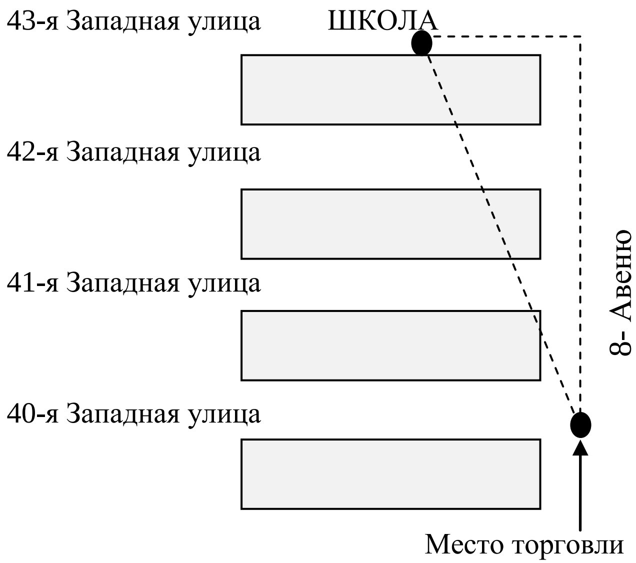
Если от «золотого» прямоугольника отсечь квадраты, получае6м все меньшие «золотые» прямоугольники, затем провести четверть дуги окружности в каждом из отсекаемых квадратов (радиус которой равен длине стороны квадрата, а центром является вершина, общая со следующим «золотым» прямоугольником), то мы получим линию, называемую логарифмической спиралью.



Казнить нельзя, помиловать!

В реальной жизни, чтобы пройти расстояние между двумя точками, не всегда получается воспользоваться прямолинейным маршрутом, ведь человек не может проходить сквозь стены.

В Америке в 2002 году был задержан гражданин на углу 8-й Авеню и Западной 40-й улицы. Его обвиняли в торговле запрещенными препаратами на расстоянии менее 1000 шагов от школы, расположенной на 43-й улице, между 8-й и 9-й Авеню.



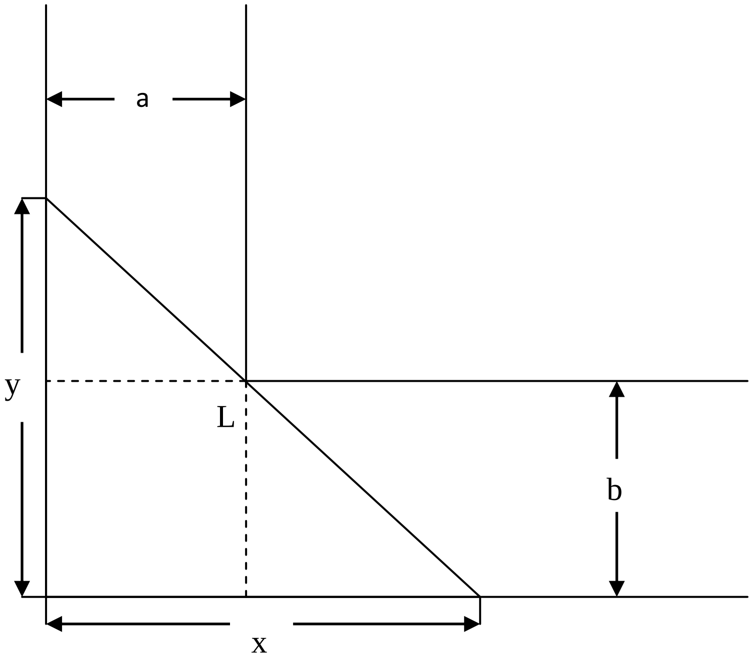
При подсчете расстояния до школы полиция применила теорему Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, где a = 764 шага (расстояние места торговли вдоль 8-й Авеню), b = 490 шагов (расстояние до школы по 43-й улице), а гипотенуза c = 907,63 шага. В этом и состояло преступление. Расстояние до школы было менее 1000 шагов.

Но адвокаты заявили, что расстояние должно измеряться так, чтобы человек его мог преодолеть в реальной жизни, не проходя сквозь стены. Таким образом, расстояние до места торговли составило 1254 шага

(a+b= 764 шага + 490 шагов = 1254 шага).

Теорема Пифагора в жизни.

Предположим, что мы решили переставить мебель из комнаты в комнату, но поворот в коридоре оказался под прямым углом. Как же нам пронести мебель по такому коридору? Мебель какого максимального размера можно пронести в этом месте? Составим схему из которой видно что ключом к решению этой задачи является уравнение Пифагора $x^2 + y^2 = L^2$. Из схемы так же видны пропорциональные отношения: $\frac{b}{y} = \frac{(x-a)}{x}$



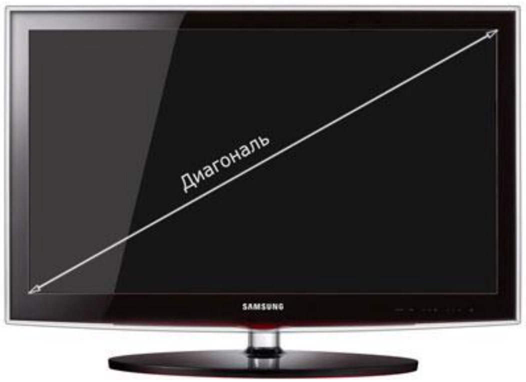
Прямоугольники в повседневной жизни: форматы телевизоров.

Как известно, размеры телевизоров даются в дюймах (дюйм примерно равен длине ногтевой фаланги большого пальца) и соответствуют длине диагонали экрана. В метрической системе дюйм – это 2,54 см.

В большинстве европейских стран используется метрическая система, поэтому многие европейцы с трудом определяют точный размер телевизора, который они собираются купить. Зная длину диагонали экрана в дюймах и соотношение его сторон, мы можем вычислить точные размеры телевизора в более понятных единицах длины, чтобы избежать неприятных сюрпризов.

Вместится ли телевизор формата 16:9 с экраном в 32 дюйма на место старого телевизора с экраном в 32 дюйма и форматом 4:3?

Итак, телевизор формата 16:9 с экраном в 32 дюйма имеет диагональ 32*2,54 = 81,28см. Поэтому его реальными размерами являются ширина 9a и длина 16a. Воспользовавшись теоремой Пифагора, мы можем решить вполне современную проблему.



$(9a)^2 + (16a)^2 = 81,28^2$

$81a^2 + 256a^2 = 337a^2 = 6606,44$

$a^2 = 6606,44/337 = 19,6$

$a = \sqrt{19,6} = 4,43$ см.

Таким образом, размеры экрана 9*4,43 = 40 см и 16*4,43 = 71 см, что составляет 40 × 71 см. Аналогичные расчеты нам покажут, что старый телевизор с экраном в 32 дюйма и форматом 4:3 имеет размеры 49 × 65 см. Отсюда следует вывод, выходящий за рамки математики: не так легко заменить старый телевизор новой моделью!

Последовательность Фибоначчи.

Сколько пар кроликов будет у нас через год, если в январе у нас была одна пара, которая каждый месяц производит на свет другую пару, начиная с марта, в свою очередь, производит собственное потомство каждый месяц, начиная со второго месяца.

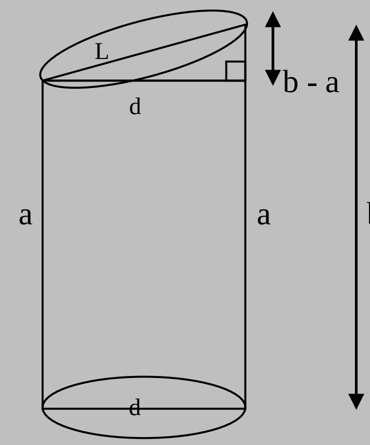
Для решения этой задачи составим следующую таблицу, в которой отобразим популяцию кроликов и подсчитаем в столбце ИТОГО число пар в конце каждого месяца.

поколение месяц	1	2	3	4	5	6	итого
Январь	1						1
Февраль	1						1
Март	1	1					2
Апрель	1	2					3
Май	1	3	1				5
Июнь	1	4	3				8
Июль	1	5	6	1			13
Август	1	6	10	4			21
Сентябрь	1	7	15	10	1		34
Октябрь	1	8	21	20	5		55
Ноябрь	1	9	28	35	15	1	89
Декабрь	1	10	36	56	35	6	144

(в столбце ИТОГО каждое число является суммой двух предыдущих, такая последовательность называется последовательностью Фибоначчи).

Интересные факты. Теорема Пифагора и палка салями.

Палка салями имеет цилиндрическую форму. Отрезанные под углом куски представляют собой эллипсы. Если диаметр палки салями d, то длина эллипса L зависит от величины угла, определенного длиной отрезка b – a. По теореме Пифагора L = $\sqrt{(b-a)^2+d^2}$. Таким образом, при заданном d можно отрезать сколь угодно большие кусочки (ограниченные только общей длиной палки салями). Размер этих кусков определяется теоремой Пифагора, но их толщина зависит от того, насколько мы голодны!



Изображение луны.

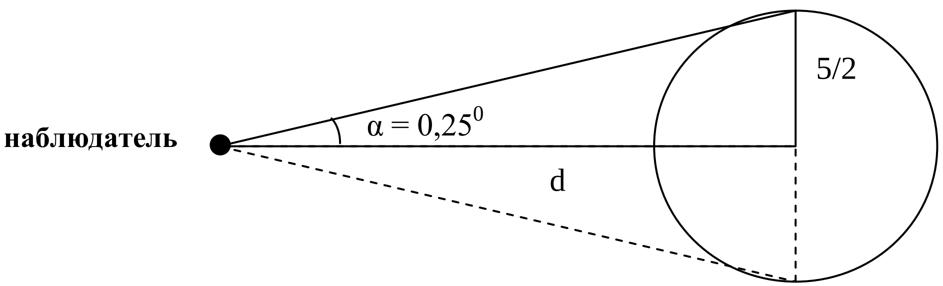
В живописи, в театре и даже в кино часто в ночных сценах изображается Луна, размер и расположение которой представлены ошибочно. Как правило, чем ниже Луна находится к горизонту, тем больше она кажется.

Правильные размеры можно получить с помощью простых расчетов с использованием прямоугольных треугольников. Вычисления просты, так как при известном расстоянии от Земли до Луны она видна под крошечным углом всего лишь в $0{,}5^0$.

Если окно на картине имеет 20 см в ширину и Луна занимает четверть этого пространства, то ее диаметр 5 см. Если художник находится от картины на расстоянии d, то мы имеем:

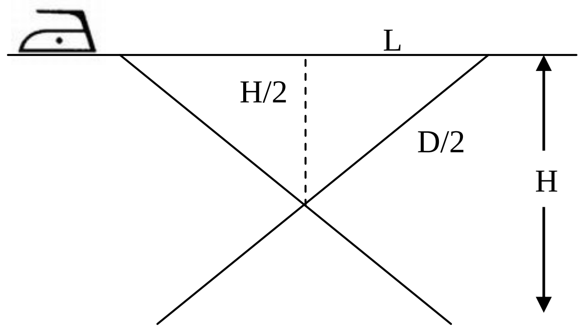
$$tg(0{,}5^0/2) = \frac{5/2}{d}$$

или $d = 2{,}5/tg\ 0{,}25^0 = 581{,}4$ см. Это означает, что картина написана художником-гигантом, который может кистью дотянуться на расстояние в 5,81 м.



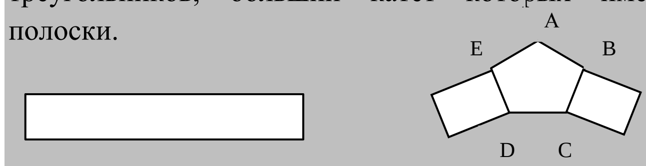
Пифагор и гладильная доска.

Гладильная доска имеет свои функции и особенности. Но для нашего математического анализа мы рассмотрим лишь одно ее свойство: гладильная доска может складываться. У нее имеются раздвижные ножки, которые позволяют расположить ее на разной высоте. Кто бы подумал, что тут применяется теорема Пифагора. Скрещенные ножки гладильной доски образуют треугольники. В соответствии с теоремой Пифагора и рисунком, соотношение $(D/2)^2 - (H/2)^2 = L^2$ позволяет вычислить длину любого отрезка на основе двух других.



Интересные факты. Правильный пятиугольник из полоски бумаги.

Несмотря на все ограничения, существует простой способ построения правильного пятиугольника, если только мы не стремимся к абсолютной точности. Надо взять полоску бумаги и завязать ее в узел. В результате получится правильный пятиугольник. Стороны полученного правильного пятиугольника ABCDE лежат на гипотенузе одинаковых треугольников, больший катет которых имеет ширину полоски.



Возраст Диофанта.

О жизни Диофанта известно мало. Существует лишь предположение о дате его рождения и смерти, но на самом деле, мы даже не знаем достоверно в каком веке он жил. Эпитафия на его могиле, сформулирована в виде задачи: «Детство Диофанта длилось одну шестую часть его жизни. Затем после одной двенадцатой своей жизни он отрастил бороду. Затем после одной седьмой он женился. Пять лет спустя у него родился сын, который, достигнув половины возраста отца, скоропостижно скончался. Отец прожил еще четыре года, оплакивая сына. Этих сведений достаточно, чтобы узнать возраст Диофанта».

Итак, из условия мы знаем, что:

Детство – 1/6 часть жизни,

Отрочество – 1/12 часть жизни,

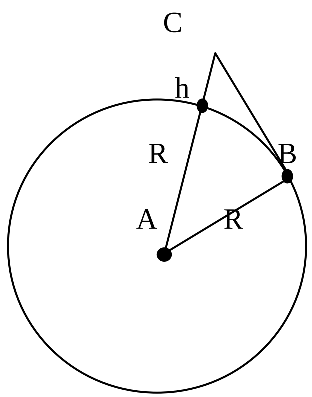
Юность – 1/7, через пять лет после свадьбы родился сын, который умер за четыре года до смерти Диофанта, прожив вдвое меньше своего отца.

Из всего этого следует следующая формула, просчитав которую мы найдем возраст Диофанта:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

Где находится горизонт.

Представьте, что вы поднялись на вершину горы и смотрите на раскинувшееся перед вами море. Снизу пляжи с белым песком или волны, разбивающиеся о скалы. А вдали горизонт. Возможно, у вас возникает вопрос, как далеко он находится. Для ответа на этот вопрос можно использовать теорему Пифагора. Вам только необходимо знать высоту над уровнем моря.



Допустим, что высота горы – 1000 метров. Тогда по теореме Пифагора – $(R + h)^2 = R^2 + v^2$, отсюда

$$v^2 = (R + h)^2 - R^2 = (R^2 + 2Rh + h^2) - R^2 = h^2 + 2Rh = h(h\text{-}2R),$$

где R – это радиус Земли.

При R = 6371 км и h = 1 км получаем v = 112,88км.

Туннель через куб.

Представьте себе большой деревянный куб со стороной 1 м. В нем мы хотим проделать отверстие, через которое мог пройти другой куб. Куб какого наибольшего размера мог бы пройти через данный куб?

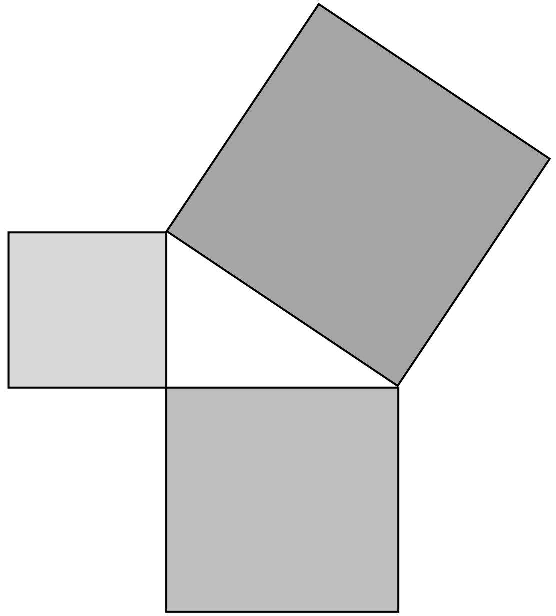
Эта интересная задача была решена голландцем Питером Ниулондом. Он установил, что куб максимального размера, который может пройти через отверстие, будет больше, чем оригинальный куб, а именно будет иметь сторону длиной 1,06066 м, иными словами, в $3\sqrt{2}/4$ раза длиннее.

Интересные факты. Почему кастрюли не квадратные.

Кастрюли имеют форму цилиндра. Вы никогда не увидите в виде призмы с квадратным основанием. Сразу было очевидно, что круг является самой подходящей формой. Так как он не имеет углов, круглое основание позволяет теплу распределяться равномерно. Но если подумать существует еще одно менее очевидное, но более важное объяснение. У кастрюль в форме цилиндра крышка не может упасть внутрь. И хотя в это трудно поверить, мы прибегнем к числу $\sqrt{2}$ для доказательства этого утверждения. Например, если бы основание кастрюли представляло собой квадрат со стороной 20 см, то его диагональ составила бы $20\sqrt{2}$ см, или 28,28 см. Крышка со стороной 20 см и даже больше, например 22, неизбежно время от времени падала бы в кастрюлю, ведь длина ее стороны меньше длины диагонали кастрюли. В цилиндрических кастрюлях такое не возможно.

Пифагоровы ТРОЙКИ.

Если длины сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, то они образуют группу из трех чисел, называемых пифагоровыми тройками. Самая известная пифагорова тройка – из наименьшего прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами – это (5, 4, 3).



Эти числа удовлетворяют соотношению: $3^2 + 4^2 = 5^2$

Как найти другие пифагоровы тройки, зная последовательность Фибоначчи? Возьмем любые четыре последовательные числа из последовательности: 2, 3 5 и 8 и построим из них еще одну пифагорову тройку.

1. Произведение двух крайних чисел: 2*8 = 16;
2. Удвоенное произведение двух чисел в середине: 2*(3*5) = 30;
3. Сумма квадратов двух чисел в середине: $3^2 + 5^2 = 34$.

Мы можем легко убедиться, что получившиеся три числа образуют пифагорову тройку:

$$16^2 = 256;\ \ 30^2 = 900;\ 34^2 = 1156 \Rightarrow 256 + 900 = 1156$$

(этот метод работает в любом случае для любых четырех последовательных чисел из последовательности Фибоначчи)